

Logica predicatelor

Semantica

Formule bine formate

- Avem 6 tipuri de simboluri in logica predicatelor:
 - Predicate: p, q, r, \dots, p_1, q_2 etc.
 - Constante: $a, b, c, \dots, z, a_1, b_4, \dots, \text{ion}, \text{mihai}, \text{labus}$ etc.
 - Variabile: x, y, z, x_1, y_1, z_4 etc.
 - Conective: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
 - Paranteze: $(,)$
 - Cuantificatori: \forall, \exists

Formule bine formate

- Un termen din logica predicatelor este fie o constanta fie o variabila.
- O formula atomica din logica predicatelor este un predicat de aritate n urmat de n termeni intre paranteze si cu virgula intre ei.

Formule bine formata

- **Def.:** Formula bine formata (fbf):
 - Orice formula atomica este o fbf.
 - Daca A este o fbf atunci $\neg A$ este o fbf.
 - Daca A si B sunt fbf, atunci $(A \wedge B)$ este o fbf.
 - Daca A si B sunt fbf, atunci $(A \vee B)$ este o fbf.
 - Daca A si B sunt fbf, atunci $(A \rightarrow B)$ este o fbf.
 - Daca A si B sunt fbf, atunci $(A \leftrightarrow B)$ este o fbf.

Formule bine formata

- **Def.:** Formula bine formata (fbf) - continuare:
 - Daca A este o fbf, x este o variabila, A contine cel putin o aparitie a lui x si niciun cuantificator de care x sa fie legat, atunci $\forall xA$ este o fbf.
 - Daca A este o fbf, x este o variabila, A contine cel putin o aparitie a lui x si niciun cuantificator de care x sa fie legat, atunci $\exists xA$ este o fbf.

Propozitii, substitutii

- O propozitie este o entitate care poate fi fie adevarata, fie falsa.
- **Def.:** O **propozitie in logica predicatelor** este o fbf din logica predicatelor care nu contine variabile libere (toate variabilele sunt legate sau instantiate).
- **Def.:** Daca A este o fbf, c o constanta si x o variabila, atunci **substitutia** $A[c|x]$ este fbf care se obtine prin inlocuirea fiecărei instante a lui x in A prin c .

Semantica in logica predicatelor

- In logica predicatelor, precum in orice limbaj logic, exista doua tipuri de elemente:
 - Simboluri logice – semnificatia lor este specificata in cadrul limbajului. Ex.: conectivele, cuantificatorii.
 - Simboluri non-logice – semnificatia lor nu este definita de structura logica a limbajului. Ex.: predicatele, constantele.
- O **interpretare** da o semnificatie tuturor elementelor non-logice ale limbajului.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- O interpretare in logica predicatelor necesita urmatoarele:
 - Un univers de definitie (domeniu).
 - O semnificatie schematica pentru fiecare predicat.
 - Un obiect care sa fie selectat de fiecare constanta.
- Sa luam urmatorul exemplu:
 - Universul de definitie: personaje de benzi desenate.
 - $p(x)$ "x lupta impotriva crimei".
 - b : Batman.
 - w : Bruce Wayne.



Interpretari si modele in logica predicatelor

- Exemplu:
 - Universul de definitie: personaje de benzi desenate.
 - $p(x)$ "x lupta impotriva crimei".
 - b : Batman.
 - w : Bruce Wayne.
- Propozitia $p(b)$ e adevarata in aceasta interpretare, dar nu doar datorita acestei interpretari.
- $p(b)$ e adevarata datorita acestei interpretari plus a unor cunostinte despre benzi desenate.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- Exemplu:
 - Universul (domeniul) de definitie: personaje de benzi desenate.
 - $p(x)$ "x lupta impotriva crimei".
 - b : Batman.
 - w : Bruce Wayne.
- Cum este $p(w)$?
- Fiindca Bruce Wayne e identitatea secreta a lui Batman, $b = w$, rezulta ca $p(w)$ e adevarata.
- Insa, aceasta fiind identitatea secreta, alte personaje nu stiu ca $p(w)$ e adevarata, desi stiu ca $p(b)$ e adevarata.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- Daca am considera asignarea de valori de adevar precum in logica propozitiilor, am putea asigna F sau A fiecarei fb atomica $p(b)$, $p(w)$ etc.
- Ar fi echivalent cu a inlocui $p(b)$ si $p(w)$ cu litere de propozitii.
 - Dar atunci am ignora toata structura logica a predicatelor si termenilor.
- In logica predicatelor, nu dam definitii separate pentru $p(b)$ si $p(w)$, ci dam semnificatii pentru p , b , w .
- Mai mult, vrem sa folosim si cuantificatori.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- Cautam asadar un complementar al asignarii de valori de adevar din logica propozitiilor pentru o interpretare a predicatelor si constantelor.
- Nu se poate utiliza o asignare de valori de adevar pentru aceasta, fiindca un predicat nu e nici fals nici adevarat.
- In exemplul de mai devreme, p e adevarat daca e aplicat lui Batman, dar nu are sens sa ne intrebam daca e adevarat in general.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- O interpretare ajuta in selectarea obiectelor asupra carora predicatul este aplicabil.
- Interpretand $p(x)$ drept "x lupta impotriva crimei", se selecteaza Batman, Superman, Spiderman etc.
- In mod formal, spunem ca aceasta e multimea membrilor universului de definitie asupra caruia predicatul este aplicabil.
- Aceasta multime poarta numele de **extensia** predicatului.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- Multe predicate au domenii de definitie foarte largi.
- In exemplul de mai sus, nu putem enumera exhaustiv toti luptatorii impotriva crimei din benzile desenate, ci folosim limbajul natural pentru a interpreta predicatul.
- Insa interpretarea singura nu spune care membri ai universului sunt in extensia predicatului, ci mai trebuie cunostinte suplimentare despre benzi desenate.
- In general, **extensia** unui predicat este rezultatul unei interpretari si al catorva cunostinte.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- Cateodata insa e posibil sa se listeze toate elementele din extensia predicatului.
- Sa mai adaugam predicatul $q(x)$ "x traieste in locuinta Wayne" la exemplul de mai devreme.
- Atunci extensia lui q este multimea:
 $extensia(q) = \{Bruce Wayne, Alfred majordomul, Dick Grayson\}$



Interpretari si modele in logica predicatelor

- Astfel, nu trebuie cunostinte despre benzi desenate pentru a determina ca, in aceasta interpretare, $q(w)$ e adevarat – Bruce Wayne e unul din membrii lui q .
- In mod similar, $\exists xq(x)$ e adevarat in aceasta interpretare: exista cel putin un membru **din univers** care este **in extensia** lui q .
- In schimb $\forall xq(x)$ e fals, fiindca nu este adevarat ca toti membrii din univers sunt in extensia lui q – mai sunt si alte personaje in benzile desenate decat acestea trei.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- Am definit semnificatia formala a unui predicat prin extensia sa.
- Cum ramane insa cu constantele b si w ?
- Intelesul unei constante determina ce membru din univers este ales de constanta.
- Individul ales de constanta se numeste **referentul** constantei.
- Ne putem gandi la litera constantei drept un nume si la referent drept lucrul numit.
- In exemplul nostru, b si w au acelasi referent, fiindca se refera la acelasi personaj.

Modele

- Un **model** in logica predicatelor este structura formala determinata de:
 - un univers,
 - o extensie pentru fiecare predicat
 - si un referent pentru fiecare constanta.

Modele - exemple

- Sa consideram urmatoarea interpretare:
 - Universul: Echipele spaniole din Champions League in 2009-2010.
 - $h(x)$: "x este o echipa din orasul Madrid".
 - f : Galacticii.
- Daca nu stim nimic despre fotbal, nu putem spune care propozitii in logica predicatelor sunt adevarate in aceasta interpretare.
- Este propozitia $h(f)$ adevarata sau falsa? Depinde care dintre echipele spaniole din Champions League 2009-2010 este supranumita Galacticii. 😊
- Care este modelul care corespunde acestei interpretari?

Modele - exemple

- Erau patru echipe in Champions League 2009-2010: Real Madrid, Atletico Madrid, Barcelona si Sevilla.
- Dintre acestea Barcelona si Sevilla nu sunt din Madrid.
- Asadar avem modelul:
 - Universul $U = \{\text{Real Madrid, Atletico Madrid, Barcelona, Sevilla}\}$
 - $\text{extensia}(h) = \{\text{Real Madrid, Atletico Madrid}\}$
 - $\text{referent}(f) = \{\text{Real Madrid}\}$
- Acum nu mai trebuie sa stim nimic despre fotbal pentru a evalua daca o propozitie care il include pe h e falsa sau adevarata in acest model.

Modele - exemple

- Universul $U = \{\text{Real Madrid, Atletico Madrid, Barcelona, Sevilla}\}$
- $\text{extensia}(h) = \{\text{Real Madrid, Atletico Madrid}\}$
- $\text{referent}(f) = \{\text{Real Madrid}\}$
- $h(f)$ e adevarat, fiindca referentul lui f , adica Real Madrid, este in extensia lui h .
- Atat $\exists x h(x)$ cat si $\exists x \neg h(x)$ sunt adevarate, fiindca
 - exista cel putin un element din U care este in extensia lui h
 - si exista cel putin un element din U care NU este in extensia lui h
- Astfel, modelul captureaza toata semnificatia formală a interpretării.

Modele - exemple

- Sa consideram urmatoarea interpretare:
 - U : numerele naturale mai mari ca 0 si mai mici decat 10.
 - $e(x)$: "x e par".
 - $n(x)$: "x este negativ".
 - $l(x, y)$: "x este mai mic decat y".
 - $t(x, y, z)$: "x inmultit cu y este egal cu z".
- Care este modelul care se potriveste acestei interpretari?
- $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- Extensia predicatelor e sau n este submultimea lui U pentru care fiecare este adevarat.

Modele - exemple

- Sa consideram urmatoarea interpretare:
 - U : numerele naturale mai mari ca 0 si mai mici decat 10.
 - $e(x)$: "x e par".
 - $n(x)$: "x este negativ".
 - $l(x, y)$: "x este mai mic decat y".
 - $t(x, y, z)$: "x inmultit cu y este egal cu z".
- $\text{extensia}(e) = \{2, 4, 6, 8\}$ – alegem elementele pare din U .
- $\text{extensia}(n) = \emptyset$ – nu exista numere negative in U .

$e(x)$: "x e par".

$n(x)$: "x este negativ".

$l(x, y)$: "x este mai mic decat y".

$t(x, y, z)$: "x inmultit cu y este egal cu z".

- U: numerele naturale mai mari ca 0 si mai mici decat 10.
- Pare ca extensia lui l:
 - Ar trebui sa il contina pe 1, fiindca 1 e mai mic decat toate celelalte numere
 - Ar trebui sa il contina si pe 2, fiindca 2 e mai mic decat toate celelalte mai putin 1.
 - Orice membru din U in afara de 9 e mai mic decat un alt membru din U.
 - Am putea deci scrie $extensia(l) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

Modele - exemple

- Continuare:
 - Am putea deci scrie $\text{extensia}(I) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?
 - Insa intr-o multime, ordinea elementelor nu conteaza.
 - Deci $\text{extensia}(I) = \{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$.
 - Scrierea nu ne spune nimic despre care membri sunt mai mici decat alti membri.

Modele - exemple

- Solutia:

- Trebuie sa aratam ca 1 e mai mic decat 8 dar si ca nu avem si situatia inversa.
- Extensia lui I va trebui sa fie alcatuita din perechi ordonate de numere.
- $extensia(I) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 1, 7 \rangle, \langle 1, 8 \rangle, \langle 1, 9 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 7 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 2, 9 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 3, 7 \rangle, \langle 3, 8 \rangle, \langle 3, 9 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 4, 6 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 4, 8 \rangle, \langle 4, 9 \rangle, \langle 5, 6 \rangle, \langle 5, 7 \rangle, \langle 5, 8 \rangle, \langle 5, 9 \rangle, \langle 6, 7 \rangle, \langle 6, 8 \rangle, \langle 6, 9 \rangle, \langle 7, 8 \rangle, \langle 7, 9 \rangle, \langle 8, 9 \rangle \}$

Modele - exemple

- Continuare:
 - $t(x, y, z)$: "x înmulțit cu y este egal cu z".
 - Extensia lui t va conține triplete ordonate de numere de tipul $\langle 2, 4, 8 \rangle$, fiindcă $2 * 4 = 8$.
- În general, extensia unui predicat de aritate n este o mulțime a tuturor n -tuplurilor ordonate $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ astfel încât
 - a_1, a_2, \dots, a_n sunt membri ai universului
 - și predicatul aplicat lui a_1, a_2, \dots, a_n este adevărat în această ordine.

Lucrul cu modele

- Fie A și B două propozitii în logica predicatelor. $A \models B$ (B se deduce din A) dacă nu există niciun model în care A să fie adevărat și B fals.
 - $\models A$ înseamnă că A este adevărat în orice model.
- Definitii:
 - O **tautologie** în logica predicatelor este o propoziție A care este adevărată în orice model, $\models A$.
 - O **contradicție** în logica predicatelor este o propoziție A care este falsă în orice model, $\models \neg A$.
 - O propoziție este **contingenta** în logica predicatelor dacă și numai dacă nu este nici o tautologie nici o contradicție.

Lucrul cu modele

- Definitii:
 - Un rationament in care C se deduce din P_1, P_2, \dots este **valid** in logica predicatelor daca si numai daca nu exista niciun model in care toate premisele sa fie adevarate si concluzia falsa, $\{P_1, P_2, \dots\} \models C$.
 - Altfel, este **nevalid** in logica predicatelor.
 - Doua propozitii A si B **sunt logic echivalente** in logica predicatelor daca si numai daca atat $A \models B$ cat si $B \models A$.
 - Multimea $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ este **consistenta** in logica predicatelor daca si numai daca exista cel putin un model in care toate propozitiile sunt adevarate.
 - Multimea este **inconsistenta** daca si numai daca nu exista un astfel de model.

Constructia de modele

- Sa aratam ca $\forall x p(x, x) \rightarrow q(d)$ nu este o tautologie.
- Trebuie sa aratam asadar ca propozitia nu este adevarata in orice model, deci ca este falsa intr-un anumit model.
- Daca evidentiem un model in care propozitia sa fie falsa, atunci am demonstrat ca nu este tautologie.
- Pentru ca $\forall x p(x, x) \rightarrow q(d)$ sa fie falsa, $\forall x p(x, x)$ trebuie sa fie adevarata si $q(d)$ falsa.
- Vrem ca $\forall x p(x, x)$ sa fie adevarata, inseamna ca fiecare membru al universului trebuie sa formeze pereche cu el insusi in extensia lui p .
- $q(d)$ trebuie sa fie fals, deci referentul lui d nu trebuie sa se afle in extensia lui q .

Constructia de modele

- Vrem ca $\forall x p(x, x)$ sa fie adevarata, inseamna ca fiecare membru al universului trebuie sa formeze pereche cu el insusi in extensia lui p .
 - Sa consideram $U = \{\text{Paris}\}$
 - $\text{extensia}(p) = \{\langle \text{Paris}, \text{Paris} \rangle\}$
- $q(d)$ trebuie sa fie fals, deci referentul lui d nu trebuie sa se afle in extensia lui q .
 - $\text{extensia}(q) = \emptyset$
 - $\text{referent}(d) = \text{Paris}$ – e singurul membru din U
- Avem astfel un model partial – nu am definit si alte predicate sau constante, ci doar cele necesare.
- In acest model, propozitia data este falsa.

Constructia de modele

- Care ar putea fi semnificatia predicatelor si a constantelor in limbaj natural?
 - $U = \{\text{Paris}\}$
 - $\text{extensia}(p) = \{\langle \text{Paris}, \text{Paris} \rangle\}$
 - $\text{extensia}(q) = \emptyset$
 - $\text{referent}(d) = \text{Paris}$
- Modelul partial ar putea corespunde unei astfel de interpretari:
 - $U = \{\text{Paris}\}$
 - $p(x, y)$: x este in aceeasi tara ca si y
 - $q(x)$: x a fost fondat in sec. XX
 - d: Orasul Luminilor

Constructia de modele

- Sa aratam ca $\forall x p(x, x) \rightarrow q(d)$ nu este o contradictie.
- Trebuie sa specificam un model in care fie $\forall x p(x, x)$ este fals, fie $q(d)$ e adevarat si $\forall x p(x, x)$ este tot adevarat.
- Un astfel de model partial ar fi:
 - $U = \{\text{Paris}\}$
 - $\text{extensia}(p) = \{\langle \text{Paris}, \text{Paris} \rangle\}$
 - $\text{extensia}(q) = \{\text{Paris}\}$
 - $\text{referent}(d) = \text{Paris}$
- Fiindca $\forall x p(x, x) \rightarrow q(d)$ nu este nici tautologie, nici contradictie inseamna ca este contingenta.
- In general, pentru a arata ca o propozitie este contingenta, va trebui sa specificam doua modele: unul in care sa fie adevarata si unul in care sa fie falsa.

Constructia de modele

- Sa aratam ca $\forall x s(x)$ si $\exists x s(x)$ nu sunt logic echivalente.
- Trebuie sa construim un model in care cele doua propozitii sa aiba valori diferite de adevar.
- De data aceasta, ne va trebui un univers cu cel putin doi membri.
- Daca am avea un singur membru, cele doua ar avea aceeasi valoare de adevar.
- Il putem face pe $\exists x s(x)$ adevarat incluzand ceva din univers in extensia lui s , iar pe $\forall x s(x)$ fals omitand ceva din univers in extensia lui s .
 - $U = \{\text{Paris, Londra}\}$
 - $\text{extensia}(s) = \{\text{Paris}\}$
- Acest model partial arata ca cele doua propozitii nu sunt logic echivalente.

Constructia de modele

$$\frac{(r(c) \wedge k_1(c)) \wedge t(c)}{t(c) \wedge k_2(c)}$$

- Sa revedem un rationament despre care am spus ca este invalid.
- Pentru a arata ca este invalid, trebuie construit un model in care premisele sa fie adevarate si concluzia falsa.
 - $U = \{\text{Mihai}\}$
 - $\text{extensia}(t) = \{\text{Mihai}\}$
 - $\text{extensia}(k_1) = \{\text{Mihai}\}$
 - $\text{extensia}(k_2) = \emptyset$
 - $\text{extensia}(r) = \{\text{Mihai}\}$
 - $\text{referent}(c) = \text{Mihai}$
- In mod similar, putem arata ca o multime de propozitii este consistenta, construind un model in care toate propozitiile sunt adevarate.

Rationand despre toate modelele

- Pentru a arata ca o propozitie nu este o tautologie, construim un model in care propozitia e falsa.
- Cum aratam insa ca o propozitie e o tautologie?
- Exista o infinitate de modele, nu putem sa le precizam pe toate, aratand ca propozitia e adevarata in cadrul lor.
- Putem lua insa, spre exemplu, propozitia $r(a, a) \leftrightarrow r(a, a)$ si sa aratam ca este o tautologie printr-un rationament simplu.
- Exista doua feluri de modele:
 - cele in care $\langle \text{referent}(a), \text{referent}(a) \rangle$ e in extensia lui r
 - si cele in care nu este.

Rationand despre toate modelele

$$r(a, a) \leftrightarrow r(a, a)$$

- Exista doua feluri de modele:
 - cele in care $\langle \text{referent}(a), \text{referent}(a) \rangle$ e in extensia lui R
 - si cele in care nu este.
- In consecinta:
 - In primul caz, $r(a, a)$ e adevarat si, din tabelul de adevar pentru \leftrightarrow , $r(a, a) \leftrightarrow r(a, a)$ e adevarat.
 - In al doilea caz, $r(a, a)$ e fals si, din tabelul de adevar pentru \leftrightarrow , $r(a, a) \leftrightarrow r(a, a)$ e adevarat.
 - Din moment ce propozitia e adevarata in oricare din cele doua tipuri posibile de model, inseamna ca e o tautologie.
- Cu toate acestea, rationamentul este facut intr-un metalimbaj si nu in logica predicatelor.

Rationand despre toate modelele

- Consideram o alta tautologie evidenta: $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$
- Am putea fi tentati sa rationam astfel:
 - $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$ e adevarata in orice model, deci si $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$ trebuie sa fie adevarata.
 - Dar $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$ nu e adevarata in orice model!
 - Ea nu reprezinta o propozitie, deci nu poate fi nici adevarata, nici falsa!
- Pentru a considera si formulele atomice care nu sunt propozitii, vom defini conceptul de **satisfiabilitate**.

Rationament / Constructie

Intrebare	DA	NU
Este A o tautologie?	Arata ca A este adevarata in orice model.	Construieste un model in care A e falsa.
Este A o contradictie?	Arata ca A este falsa in orice model.	Construieste un model in care A e adevarata.
Este A contingenta?	Construieste doua modele, unul in care A este adevarata si altul in care este falsa.	Arata ca fie A e o tautologie, fie o contradictie.
Sunt A si B echivalente?	Arata ca A si B au aceeasi valoare de adevar in orice model.	Construieste un model in care A si B au valori diferite de adevar.
Este multimea A consistenta?	Construieste un model in care toate propozitiile din A sunt adevarate.	Arata ca propozitiile nu pot fi toate adevarate in orice model.
Este deductia lui C din P valida?	Arata ca in orice model in care P e adevarata, C este adevarata.	Construieste un model in care P e adevarata si C falsa.

Satisfiabilitate

- Cum se interpreteaza o variabila libera, de exemplu x in $p(x)$?
- Vom introduce o **asignare de variabile** – o functie care realizeaza potrivirea intre fiecare variabila si un membru al universului U .
- **Def. 1:** O formula $p(x)$ este satisfiabila intr-un model M de o asignare de variabile a daca si numai daca $a(x)$, obiectul pe care a il asigneaza lui x , este in extensia lui $p(x)$ in M .
- Cand este acum $\forall x p(x)$ satisfiabil?
- Nu e suficient ca $p(x)$ e satisfiabil in M pentru a :
 - Aceasta inseamna ca $a(x)$ e in extensie(p).
 - $\forall x p(x)$ necesita ca fiecare membru al lui U sa fie in extensie(p).

Satisfiabilitate

- **Def. 2:** Pentru fiecare membru o al universului U si fiecare variabila x , fie $a[x|o]$ asignarea de variabile care atribuie o lui x , dar respecta in celelalte cazuri definitia lui a .
- Formal:
$$a[x|o](y) = \begin{cases} o, & \text{daca } y = x \\ a(y), & \text{altfel} \end{cases}$$
- **Def. 3:** $\forall x p(x)$ e satisfiabil intr-un model M de o asignare de variabile a daca si numai daca, pentru fiecare obiect o din universul U al lui M , $p(x)$ e satisfiabila in M prin $a[x|o]$.

Satisfiabilitate

- **Def. 4:** Definim o functie s intr-un model M astfel incat, pentru orice fbf A si asignare de variabile a , $s(A, a) = 1$ daca A e satisfiabil in M de a ; altfel $s(A, a) = 0$.
- 1. Daca A este o fbf atomica de forma $p(t_1, \dots, t_n)$ si o_i este obiectul selectat de t_i , atunci

$$s(A, a) = \begin{cases} 1, & \text{daca } \langle o_1, \dots, o_n \rangle \text{ este in extensie } (P) \text{ in } M \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Pentru fiecare termen t_i :
 - Daca t_i este o constanta, atunci $o_i = \text{referent}(t_i)$.
 - Daca t_i este o variabila, atunci $o_i = a(t_i)$.

Satisfiabilitate

- 2. Daca A este $\neg B$, cu B fbf, atunci:

$$s(A, a) = \begin{cases} 1, & \text{daca } s(B, a) = 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- 3. Daca A este $B \wedge C$, pentru B si C fbf, atunci:

$$s(A, a) = \begin{cases} 1, & \text{daca } s(B, a) = 1 \text{ si } s(C, a) = 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- 4. Daca A este $B \vee C$, pentru B si C fbf, atunci:

$$s(A, a) = \begin{cases} 0, & \text{daca } s(B, a) = 0 \text{ sau } s(C, a) = 0 \\ 1, & \text{altfel} \end{cases}$$

- 5. Daca A este $B \rightarrow C$, pentru B si C fbf, atunci:

$$s(A, a) = \begin{cases} 0, & \text{daca } s(B, a) = 1 \text{ si } s(C, a) = 0 \\ 1, & \text{altfel} \end{cases}$$

Satisfiabilitate

- 6. Daca A este $B \leftrightarrow C$, pentru B si C fbf, atunci:

$$s(A, a) = \begin{cases} 1, & \text{daca } s(B, a) = s(C, a) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- 7. Daca A este $\forall xB$, pentru B fbf si variabila x, atunci:

$$s(A, a) = \begin{cases} 1, & \text{daca } s(B, a[x|o]) = 1 \text{ pentru fiecare membru } o \in U \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- 8. Daca A este $\exists xB$, pentru B fbf si variabila x, atunci:

$$s(A, a) = \begin{cases} 1, & \text{daca } s(B, a[x|o]) = 1 \text{ pentru cel putin un membru } o \in U \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Adevarul

- Sa consideram o propozitie simpla precum $\forall x p(x)$:
 - Din punctul 7 de la definitia satisfiabilitatii, propozitia e satisfiabila daca $a[x|o]$ satisface $p(x)$ in M pentru fiecare o din U .
 - Din punctul 1, aceasta se intampla daca fiecare o se afla in extensia lui p .
- Faptul ca $\forall x p(x)$ e satisfiabil sau nu depinde de asignarea particulara de variabile a .
- Daca aceasta propozitie e satisfiabila, atunci ea este adevarata.
- Astfel formalizam faptul ca $\forall x p(x)$ e adevarata daca toate elementele din U sunt in extensia lui p .

Adevarul

- Asadar, in cazul fiecarei propozitii din logica predicatelor, din motivul ca toate variabilele sunt legate, aceasta este satisfiabila sau nu indiferent de detaliile asignarii de variabile.
- **Def. 5:** O propozitie A este **adevarata** in M daca si numai daca vreo asignare de variabile satisface pe A in M; altfel, A este **falsa** in M.
- Sa vedem acum cum putem folosi notiunile de satisfiabilitate si adevar pentru a realiza un rationament unde sunt implicate o infinitate de modele.

Demonstrati ca $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$ este o tautologie.

- Sa consideram un model arbitrar M si un membru o arbitrar din U .
 - Daca $\langle o, o \rangle$ se afla in extensia lui r , atunci $r(x, x)$ este satisfiabil de asignarea de variabile care il atribuie pe o lui x (punctul 1 din def. 4).
 - Din moment ce consecinta lui $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$ este satisfiabila, implicatia este satisfiabila (punctul 5).
 - Daca $\langle o, o \rangle$ nu se afla in extensia lui r , atunci $r(x, x)$ nu este satisfiabil de asignarea de variabile care il atribuie pe o lui x (punctul 1).
 - Din moment ce conditia lui $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$ este nesatisfiabila, implicatia este satisfiabila (punctul 5).

Demonstrati ca $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$ este o tautologie.

- $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$ este satisfiabila pentru fiecare membru din U , deci $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$ este satisfiabila de orice asignare de variabile (punctul 7).
- Deci $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$ este adevarata in M (def. adevarului), pentru orice U si extensie a lui r , deci e adevarata in orice model, fiind asadar o tautologie.

Demonstrati ca $\forall x h(x)$ se deduce din $\forall x(h(x) \wedge j(x))$.

- Sa consideram un model arbitrar M in care premisa $\forall x(h(x) \wedge j(x))$ este adevarata (vezi tabel).
 - Conjunctia $h(x) \wedge j(x)$ e satisfiabila indiferent de asignarea pentru x , asadar asa este si $h(x)$ (punctul 3 din def. 4).
 - Deci $\forall x h(x)$ este satisfiabila de orice asignare de variabile (punctul 7) si adevarata in M (def. adevarului).
 - M fiind arbitrar ales, rezulta ca $\forall x h(x)$ este adevarata in orice model in care $\forall x(h(x) \wedge j(x))$ e adevarata.
 - Deci $\forall x(h(x) \wedge j(x)) \models \forall x h(x)$.
 - Chiar si pentru argumente simple, rationamentul e complicat.
 - Pentru a contracara acest aspect, vom studia in cursul urmator sistemele de demonstratie.

Exercitii

- 1. Determinati daca fiecare propozitie este adevarata sau falsa in modelul dat:
 - $U = \{\text{Cristi, Alin}\}$
 - $\text{Extensia}(p) = \{\text{Cristi, Alin}\}$
 - $\text{Extensia}(q) = \{\text{Alin}\}$
 - $\text{Extensia}(r) = \emptyset$
 - $\text{Referent}(c) = \text{Cristi}$
- 1. $q(c)$
- 2. $p(c) \leftrightarrow \neg r(c)$
- 3. $r(c) \rightarrow (p(c) \vee q(c))$
- 4. $\forall x p(x)$
- 5. $\forall x \neg q(x)$
- 6. $\exists x (p(x) \wedge q(x))$
- 7. $\exists x q(x) \rightarrow \forall x p(x)$

Exercitii

- 2. Determinati daca fiecare propozitie este adevarata sau falsa in modelul dat:
 - $U = \{\text{Cristi, Mihai, Ionut}\}$
 - $\text{extensia}(p) = \{\text{Cristi, Mihai, Ionut}\}$
 - $\text{extensia}(q) = \{\text{Cristi, Mihai}\}$
 - $\text{extensia}(r) = \{\langle \text{Cristi, Mihai} \rangle, \langle \text{Mihai, Ionut} \rangle, \langle \text{Ionut, Cristi} \rangle\}$
 - $\text{referent}(c) = \text{Ionut}$
- 1. $\exists x(r(x, c) \wedge r(c, x))$
- 2. $\forall x(p(x) \leftrightarrow q(x))$
- 3. $\forall x(r(x, c) \rightarrow q(x))$
- 4. $\forall x(q(x) \rightarrow (p(x) \wedge q(x)))$
- 5. $\forall x \forall y r(x, y)$
- 6. $\forall x \forall y (r(x, y) \vee r(y, x))$

Exercitii

- 3. Determinati daca fiecare propozitie este adevarata sau falsa in modelul dat:
 - $U = \{\text{Tiberiu}, \text{Cristina}, \text{Edi}\}$
 - $\text{extensia}(p) = \{\text{Tiberiu}, \text{Cristina}, \text{Edi}\}$
 - $\text{extensia}(q) = \{\text{Cristina}\}$
 - $\text{extensia}(r) = \{\text{Tiberiu}, \text{Edi}\}$
 - $\text{referent}(c) = \text{Cristina}$
 - $\text{referent}(e) = \text{Edi}$
- 1. $q(c)$
- 2. $q(e)$
- 3. $r(c) \vee r(e)$
- 4. $r(c) \rightarrow p(c)$
- 5. $\exists x(p(x) \wedge q(x))$
- 6. $\exists xq(x) \wedge \exists xr(x)$
- 7. $\forall x(q(x) \leftrightarrow \neg r(x))$
- 8. $\forall x\exists y(p(x) \wedge q(y))$

Exercitii

- 4. Scrieti modelul care corespunde la urmatoarea interpretare:
- U : numere naturale de la 10 la 13
- $p(x)$: x este impar
- $q(x)$: despre x se spune ca poarta ghinion
- $r(x, y)$: x este urmatorul numar dupa y
- $s(x)$: x este mai mic decat 9
- $t(x)$: x este un numar format din doua cifre

Exercitii

- 5. Aratati ca fiecare din urmatoarele este contingent:
 - $p(a) \wedge p(b)$
 - $\exists x(t(x, c))$
 - $p(c) \wedge \neg \forall x p(x)$
 - $\exists x(p(x) \rightarrow \forall y q(y))$

Exercitii

- 6. Aratati ca urmatoarele perechi de propozitii nu sunt logic echivalente:
 - $p(a), q(a)$
 - $\exists x p(x), p(x)$
 - $\forall x r(x, x), \exists x r(x, x)$
 - $\exists x p(x) \rightarrow q(x), \exists x (p(x) \rightarrow q(x))$
 - $\forall x \exists y r(x, y), \exists x \forall y r(x, y)$

Exercitii

- 7. Aratati ca urmatoarele multimi de propozitii sunt consistente:
 - $\{p(a), \neg q(a), r(a), \neg s(a)\}$
 - $\{p(c, c), p(c, a), \neg p(a, c), \neg p(a, a)\}$
 - $\{p(a) \vee p(b), p(a) \rightarrow \forall x \neg p(x)\}$
 - $\{\exists x(q(x) \vee p(x)), \forall x \neg r(x), \forall x[(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow r(x)]\}$

Exercitii

- 8. Construiti modele pentru a arata ca urmatoarele rationamente sunt nevalide:

$$\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$$

$$\exists xq(x)$$

$$p(a)$$

$$p(b)$$

$$p(c)$$

$$\forall xp(x)$$

$$\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$$

$$\forall x(p(x) \rightarrow r(x))$$

$$q(x) \wedge r(x)$$

$$q(a, b) \rightarrow \forall xq(x, b)$$

$$\exists xq(x, b)$$

$$q(b, b)$$