Demonstratii in logica predicatelor

Catalin Stoean
catalin.stoean@inf.ucv.ro
http://inf.ucv.ro/~cstoean

Reguli pentru cuantificatori

- Pentru demonstratii in logica predicatelor, folosim toate regulile din cadrul demonstratiilor din logica propozitiilor.
- In plus, avem reguli de introducere si de eliminare pentru fiecare din cei doi cuantificatori.
- Pe langa regulile de inlocuire din cadrul logicii propozitiilor, adaugam si unele specifice logicii predicatelor legate de negarea cuantificatorilor.

Eliminarea cuantificatorului universal

- Daca stim $\forall x p(x)$ adevarat, este normal sa ne gandim ca p este adevarat pentru orice.
  - Putem deduce p(a), p(b), p(c), p(a37), p(b89),…
  - Se poate deduce p(c) pentru orice constanta *c*.

m	$\forall x P$	
	$P[c \mid x]$	$\forall$E *m*

  - P[c|x] este o instanta de substitutie pentru P, adica variabila x este inlocuita peste tot in P de constanta c.
  - Cu P am notat orice formula bine formata din logica predicatelor.

Eliminarea cuantificatorului universal

- Ex:

1	$\forall x(p(x) \rightarrow r(x, d))$	
2	$p(a) \rightarrow r(a, d)$	$\forall$ E 1
3	$p(d) \rightarrow r(d, d)$	$\forall$ E 1

Introducerea cuantificatorului existential

- Cand putem deduce $\exists x p(x)$?
  - Daca stim ceva legat de predicatul p, de ex avem p(c) disponibil in demonstratie.

m	P	
	$\exists x P[x \| \| c]$	$\exists$I *m*

- P[x||c] nu este o substitutie.
- Prin P[x||c] intelegem ca variabila x nu trebuie sa inlocuiasca peste tot constanta c.
  - Putem alege ce aparitii sa fie inlocuite si care sa fie lasate cum erau.

Introducerea cuantificatorului existential

- Ex:

1	$p(a) \rightarrow r(a, d)$	
2	$\exists x(p(a) \rightarrow r(a, x))$	$\exists$ I 1
3	$\exists x(p(x) \rightarrow r(x, d))$	$\exists$ I 1
4	$\exists x(p(x) \rightarrow r(a, d))$	$\exists$ I 1
5	$\exists x \exists y(p(x) \rightarrow r(y, d))$	$\exists$ I 1
6	$\exists x \exists y \exists z(p(x) \rightarrow r(y, z))$	$\exists$ I 1

Introducerea cuantificatorului universal

- O afirmatie precum $\forall x p(x)$ poate fi dovedita daca fiecare substitutie posibila (p(a), p(b), …) ar fi dovedita anterior.
- Exista o infinitate de constante in logica predicatelor, deci nu pot sa apara toate in demonstratie anterior.
- Cum se poate demonstra ca:

$$\frac{\forall x p(x)}{\forall y p(y)}$$

Introducerea cuantificatorului universal

- Nu are nicio importanta pentru propozitie daca folosim variabila x sau variabila y.

1	$\forall x p(x)$	vrem $\forall y p(y)$
2	p(a)	$\forall$ E 1

- La fel, putem deduce p(b), p(c), p(a32), …
- Se poate asadar deduce p(c) pentru orice constanta c.
  - Din aceasta, ne rezulta $\forall y p(y)$.

Introducerea cuantificatorului universal

- Este important de observat ca *a* este o constanta aleasa arbitrar.
  - Daca p(a) era o premisa, nu puteam deduce ceva despre orice y.

1	$\forall x p(x)$	vrem $\forall y p(y)$
2	p(a)	$\forall$ E 1
3	$\forall y p(y)$	$\forall$ I 2

Introducerea cuantificatorului universal

- Contraexemplu:

1	$\forall x p(x, a)$	
2	p(a, a)	$\forall$ E 1
3	$\forall y p(y, y)$	NU ESTE CORECT!

- Trebuie sa luam o constanta care nu mai apare in cadrul demonstratiei.

Introducerea cuantificatorului universal

1	$\forall x p(x, a)$	
2	p(a, a)	$\forall$ E 1
3	$\forall y p(y, y)$	NU ESTE CORECT!

- Trebuie sa luam o constanta care nu mai apare in cadrul demonstratiei.

CORECT

1	$\forall x p(x, a)$	
2	p(b, a)	$\forall$ E 1
3	$\forall y p(y, a)$	$\forall$ I 2

Introducerea cuantificatorului universal

- Constanta poate insa aparea in presupunerea unei subdemonstratii.
- De exemplu, se poate dovedi $\forall x(p(x) \rightarrow p(x))$ fara nicio premisa.

1	p(c)	
2	p(c)	R1
3	$p(c) \rightarrow p(c)$	$\rightarrow$ I 1-2
4	$\forall x(p(x) \rightarrow p(x))$	$\forall$ I 3

Eliminarea cuantificatorului existential

- O propozitie cu un cuantificator existential ne spune ca exista vreun element din univers care satisface fromula.
- De exemplu, $\exists x p(x)$ ne spune ca exista cel putin un element care il face pe *p* adevarat, dar nu stim care element din U.

- Daca stim $\exists x p(x)$ si $\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$, avem urmatorul rationament:
  - Exista un "c" pentru a avea p(c) adevarat.
  - Din $\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$ obtinem ca si q(c) este adevarat, adica…

    $\exists x q(x)$

Eliminarea cuantificatorului existential

1	$\exists x p(x)$	
2	$\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$	vrem $\exists x q(x)$
3	p(a)	
4	$p(a) \rightarrow q(a)$	$\forall$E 2
5	q(a)	$\rightarrow$E 3, 4
6	$\exists x q(x)$	$\exists$I 5
7	$\exists x q(x)$	$\exists$ E 1, 3-6

Eliminarea cuantificatorului existential

m	$\exists x P$	
n	P[x|c]*	
p	Q	
	Q	$\exists$E m, n-p

- * Constanta c nu apare in $\exists x P$, in Q sau in orice alta parte a demonstratiei.

Negarea cuantificatorilor

1	$\forall x p(x)$	vrem $\neg\exists x\neg p(x)$
2	$\exists x\neg p(x)$	RA
3	$\neg p(c)$	Pt $\exists$E
4	$\forall x p(x)$	RA
5	p(c)	$\forall\exists$ 4
6	$\neg p(c)$	R3
7	$\neg\forall x p(x)$	$\neg$ I 4-6
8	$\neg\forall x p(x)$	$\exists$E 2, 3-7
9	$\forall x p(x)$	R1
10	$\neg\exists x\neg p(x)$	$\neg$ I 2-9

Negarea cuantificatorilor

- Am aratat ca pornind de la $\forall x p(x)$ se ajunge la $\neg\exists x\neg p(x)$.
  - Pentru a arata ca cele doua sunt echivalente, trebuie sa pornim de la cea de a doua sa ajungem la prima.
- In demonstratii, vom putea folosi in continuare urmatoarele doua reguli de inlocuire de la Negarea Cuantificatorilor (notate cu NC)
- $\neg\forall x p(x) \equiv \exists x\neg p(x)$
- $\neg \exists x p(x) \equiv \forall x\neg p(x)$

Concepte legate de teoria demonstratiilor

- Pentru a indica faptul ca o demonstratie este posibila, vom folosi simbolul $\vdash$.
  - A nu se confunda cu simbolul $\vDash$ pe care l-am folosit pentru deductia propozitiilor.
- $\{A_1, A_2, ….\} \vdash B$ inseamna ca putem da o demonstratie pentru *B* avand A_1, A_2, … drept premise.
- $A \vdash B$ inseamna ca exista o demonstratie a lui *B* cu *A* drept premisa.
- $\vdash B$ inseamna ca exista o demonstratie a lui *B* care nu are premise.

Concepte legate de teoria demonstratiilor

- De multe ori, demonstratiile logice se mai numesc si derivari.
- Deci A ⊢ B poate fi citita si ca "B este derivabil din A".
- O teorema este o propozitie care este derivabila fara nicio premisa.
  - Adica *T* este o teorema daca si numai daca ⊢ T.
- Pentru a arata ca o propozitie este teorema trebuie sa dam o demonstratie a acesteia.
- Dar cum putem arata ca ceva nu este o teorema?
  - Daca negatia sa este o teorema, atunci problema este rezolvata.

Concepte legate de teoria demonstratiilor

- Dar pentru o propozitie care nu este nici teorema, nici negatia unei teoreme ar trebui sa aratam ca nicio demonstratie nu e posibila.
- Doua propozitii *A* si *B* sunt demonstrabil echivalente daca si numai daca fiecare poate fi derivata din cealalta.
  - Adica A ⊢ B si B ⊢ A.
- Pentru a demonstra ca doua propozitii sunt demonstrabil echivalente, avem nevoie doar de o pereche de demonstratii.
- Insa a arata ca doua propozitii nu sunt demonstrabil echivalente e la fel de dificil precum a arata ca o propozitie nu este teorema.

Concepte legate de teoria demonstratiilor

- O multime de propozitii $\{A_1, A_2, \ldots\}$ este demonstrabil inconsistenta daca si numai daca se poate deriva o contradictie din aceasta.
- Adica, avand propozitia *B*, $\{A_1, A_2, \ldots\} \vdash B$ si $\{A_1, A_2, \ldots\} \vdash \neg B$.
- Pentru a arata ca o multime este demonstrabil inconsistenta, trebuie sa ne asumam propozitiile din multime si sa demonstram o contradictie.
- Pentru a arata insa ca o multime nu este demonstrabil inconsistenta ar necesita a dovedi ca demonstratiile de un anumit tip sunt imposibile.

Demonstratii si modele

- Insa exista o conexiune intre teoreme si tautologii.
- Exista un mod formal de a arata ca o propozitie este o teorema: prin demonstratie.
- Pentru a arata insa ca o propozitie este o tautologie ar fi necesar un rationament in limbaj natural asupra tuturor modelelor posibile.
- Nu exista un mod formal de a verifica ca rationamentul este corect.
- Daca putem alege intre a arata ca o propozitie este o teorema sau ca este o tautologie, ar fi mai usor de dovedit ca este o teorema.

Demonstratii si modele

- Invers, nu exista un mod formal de a arata ca o propozitie nu este o teorema.
- Ar necesita un rationament in limbaj natural asupra tuturor demonstratiilor posibile.
- Cu toate acestea, exista o metoda formala pentru a arata ca o propozitie nu este o tautologie.
  - Trebuie doar sa construim un model in care propozitia este falsa.
- Daca putem face o alegere intre a arata ca o propozitie nu este o teorema sau ca nu este o tautologie, ar fi mai usor de dovedit ca nu este o tautologie.

Demonstratii si modele

- Din fericire, avem conexiunea care precizeaza ca o propozitie este o teorema daca si numai daca este o tautologie.
- Daca dam o demonstratie pentru ⊢ A si astfel aratam ca este o teorema, rezulta ca *A* este o tautologie, adica ⊨ A.
- In mod similar, daca vom construi un model in care *A* este falsa si deci aratam ca nu este o tautologie, rezulta atunci ca *A* nu este o teorema.
- In general: A ⊢ B daca si numai daca A ⊨ B.
- Un rationament este valid daca si numai daca concluzia este derivabila din premise.

Demonstratii si modele

- Doua propozitii sunt logic echivalente daca si numai daca sunt demonstrabil echivalente.
- O multime de propozitii este consistenta daca si numai daca nu este demonstrabil inconsistenta.
- Avand deci un rationament pe care il putem traduce in logica predicatelor:
  - Daca este valid din punct de vedere deductiv, atunci putem sa ii dam o demonstratie formala.
  - Daca este invalid, atunci putem da un contraexemplu formal.

Demonstratii si modele

Intrebare	DA	NU
Este A o tautologie?	Demonstreaza $\vdash$ A	Construieste un model in care A e falsa.
Este A o contradictie?	Demonstreaza $\vdash \neg$A	Construieste un model in care A e adevarata.
Este A contingenta?	Construieste doua modele, unul in care A este adevarata si altul in care este falsa.	Demonstreaza $\vdash$ A sau $\vdash \neg$A
Sunt A si B echivalente?	Demonstreaza A $\vdash$ B si B $\vdash$ A	Construieste un model in care A si B au valori diferite de adevar.
Este multimea A consistenta?	Construieste un model in care toate propozitiile din A sunt adevarate.	Luand propozitiile din A, demonstreaza B si $\neg$B.
Este deductia lui C din P valida?	Demonstreaza ca P $\vdash$ C	Construieste un model in care P e adevarata si C falsa.

1	$\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$
2	$\exists x \forall y r(x, y)$
3	$\forall x p(x)$
4	$p(c)$
5	$p(c) \rightarrow q(c)$
6	$q(c)$
7	$\forall y r(c, y)$
8	$r(c, c)$
9	$q(c) \wedge r(c, c)$
10	$\exists x(q(x) \wedge r(x, x))$
11	$\exists x(q(x) \wedge r(x, x))$

1	$\forall x(\exists y r(x, y) \rightarrow \forall z r(z, x))$
2	$r(c, d)$
3	$\exists y r(c,y) \rightarrow \forall z r(z, c)$
4	$\exists y r(c,y)$
5	$\forall z r(z, c)$
6	$r(e, c)$
7	$\exists y(r(e, y) \rightarrow \forall z r(z, e))$
8	$\exists y(r(e, y)$
9	$\forall z r(z, e)$
10	$r(e, e)$
11	$\forall x r(x, x)$

Demonstratii si modele

- **Ex. 3:** Dati o demonstratie pentru fiecare asertiune:
  - $\{\forall x(p(x) \leftrightarrow q(x)), p(a) \wedge \exists x r(x, c)\} \vdash \exists x q(x)$
  - $\forall x(p(x) \wedge q(t)) \vdash \forall x p(x) \wedge q(t)$
  - $\forall x \forall y p(x, y) \vdash \exists x p(x, x)$
  - $\{\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \exists x p(x)\} \vdash \exists x q(x)$
  - $\{q(a) \rightarrow \forall x(p(x) \leftrightarrow p(a)), p(a), \neg p(b)\} \vdash \neg q(a)$

Demonstratii si modele

- **Ex. 4:** Simbolizati fiecare dintre urmatoarele rationamente in logica predicatelor si adaugati presupunerea aditionala “Exista un P”. Demonstrati apoi ca formele suplimentare ale argumentelor sunt valide in logica predicatelor.
  - Din “Toti P sunt Q. Toti P sunt R.” se deduce ca “Exista un Q care este R.”
  - Din “Niciun Q nu este R. Toti P sunt Q” se deduce ca “Exista un P care nu este R.”
  - Din “Toti Q sunt R. Toti P sunt Q.” se deduce ca “Exista un P care este R.”

Demonstratii si modele

- **Ex. 5:** Aratati ca fiecare pereche de propozitii este demonstrabil echivalenta:
  - $\forall x(p(x) \to \neg q(x))$, $\neg\exists x(p(x) \wedge q(x))$
  - $\forall x(\neg p(x) \to q(c))$, $\forall xp(x) \vee q(c)$
- **Ex. 6:** Aratati ca fiecare din urmatoarele este demonstrabil inconsistenta.
  - $\{p(c) \to q(d), q(d) \to p(c), q(d) \wedge \neg p(c)\}$
  - $\{\forall x(p(x) \to q(x)), \forall z(p(z) \to r(z)), \forall yp(y), \neg q(a) \wedge \neg r(b)\}$

Demonstratii si modele

- **Ex. 7:** Pentru fiecare din urmatoarele perechi de propozitii:
  - Daca sunt logic echivalente in logica predicatelor, dati demonstratii pentru a arata aceasta.
  - Daca nu sunt, construiti un model in acest sens:

  - $\forall xp(x) \to q(c)$, $\forall x(p(x) \to q(c))$
  - $\forall x\forall y\forall zp(x, y, z)$, $\forall xp(x, x, x)$

Demonstratii si modele

- **Ex. 8:** Pentru fiecare din urmatoarele argumente:
  - Daca este valid in logica predicatelor, dati o demonstratie.
  - Daca este invalid, construiti un model pentru a arata aceasta:

  - Din $\exists x(p(x) \wedge \neg q(x))$ se deduce $\forall x(p(x) \wedge \neg q(x))$
  - Din $\forall x(p(x) \to q(c))$ si $p(d)$ se deduce $q(c)$
  - Din $\forall x(p(x) \to q(x))$ si $\forall x(q(x) \to r(x))$ se deduce ca $\forall x(p(x) \to r(x))$
  - Din $\exists x(p(x) \vee q(x))$, $\forall x(p(x) \to r(x))$ se deduce ca $\exists x(p(x) \wedge r(x))$