

# Logica predicatelor

Semantica

**Catalin Stoean**

[catalin.stoean@inf.ucv.ro](mailto:catalin.stoean@inf.ucv.ro)

<http://inf.ucv.ro/~cstoean>

# Formule bine formate

- Avem 6 tipuri de simboluri in logica predicatelor:
  - Predicate:  $p, q, r, \dots, p_1, q_2$  etc.
  - Constante:  $a, b, c, \dots, z, a_1, b_4, \dots, \text{ion}, \text{mihai}, \text{labus}$  etc.
  - Variabile:  $x, y, z, x_1, y_1, z_4$  etc.
  - Conective:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - Paranteze:  $(, )$
  - Cuantificatori:  $\forall, \exists$

# Formule bine formate

- Un termen din logica predicatelor este fie o constanta fie o variabila.
- O formula atomica din logica predicatelor este un predicat de aritate  $n$  urmat de  $n$  termeni intre paranteze si cu virgula intre ei.

# Formule bine formata

- **Def.:** Formula bine formata (fbf):
  - Orice formula atomica este o fbf.
  - Daca A este o fbf atunci  $\neg A$  este o fbf.
  - Daca A si B sunt fbf, atunci  $(A \wedge B)$  este o fbf.
  - Daca A si B sunt fbf, atunci  $(A \vee B)$  este o fbf.
  - Daca A si B sunt fbf, atunci  $(A \rightarrow B)$  este o fbf.
  - Daca A si B sunt fbf, atunci  $(A \leftrightarrow B)$  este o fbf.

# Formule bine formata

- **Def.:** Formula bine formata (fbf) - continuare:
  - Daca  $A$  este o fbf,  $x$  este o variabila,  $A$  contine cel putin o aparitie a lui  $x$  si niciun cuantificator de care  $x$  sa fie legat, atunci  $\forall xA$  este o fbf.
  - Daca  $A$  este o fbf,  $x$  este o variabila,  $A$  contine cel putin o aparitie a lui  $x$  si niciun cuantificator de care  $x$  sa fie legat, atunci  $\exists xA$  este o fbf.

# Propozitii, substitutii

- O propozitie este o entitate care poate fi fie adevarata, fie falsa.
- **Def.:** O **propozitie in logica predicatelor** este o fbf din logica predicatelor care nu contine variabile libere (toate variabilele sunt legate sau instantiate).
- **Def.:** Daca  $A$  este o fbf,  $c$  o constanta si  $x$  o variabila, atunci **substitutia**  $A[c|x]$  este fbf care se obtine prin inlocuirea fiecărei instante a lui  $x$  in  $A$  prin  $c$ .

# Semantica in logica predicatelor

- In logica predicatelor, precum in orice limbaj logic, exista doua tipuri de elemente:
  - Simboluri logice – semnificatia lor este specificata in cadrul limbajului. Ex.: conectivele, cuantificatorii.
  - Simboluri non-logice – semnificatia lor nu este definita de structura logica a limbajului. Ex.: predicatele, constantele.
- O **interpretare** da o semnificatie tuturor elementelor non-logice ale limbajului.

# Interpretari si modele in logica predicatelor

- O interpretare in logica predicatelor necesita urmatoarele:
  - Un univers de definitie (domeniu).
  - O semnificatie schematica pentru fiecare predicat.
  - Un obiect care sa fie selectat de fiecare constanta.
- Sa luam urmatorul exemplu:
  - Universul de definitie: personaje de benzi desenate.
  - $p(x)$  "x lupta impotriva crimei".
  - $b$ : Batman.
  - $w$ : Bruce Wayne.





# Interpretari si modele in logica predicatelor

- Exemplu:
  - Universul de definitie: personaje de benzi desenate.
  - $p(x)$  "x lupta impotriva crimei".
  - $b$ : Batman.
  - $w$ : Bruce Wayne.
- Propozitia  $p(b)$  e adevarata in aceasta interpretare, dar nu doar datorita acestei interpretari.
- $p(b)$  e adevarata datorita acestei interpretari plus a unor cunostinte despre benzi desenate.

# Interpretari si modele in logica predicatelor

- Exemplu:
  - Universul (domeniul) de definitie: personaje de benzi desenate.
  - $p(x)$  "x lupta impotriva crimei".
  - $b$ : Batman.
  - $w$ : Bruce Wayne.
- Cum este  $p(w)$ ?
- Fiindca Bruce Wayne e identitatea secreta a lui Batman,  $b = w$ , rezulta cu  $p(w)$  e adevarata.
- Insa, aceasta fiind identitatea secreta, alte personaje nu stiu ca  $p(w)$  e adevarata, desi stiu ca  $p(b)$  e adevarata.

# Interpretari si modele in logica predicatelor

- Daca am considera asignarea de valori de adevar precum in logica propozitiilor, am putea asigna F sau A fiecarei fbf atomice  $p(b)$ ,  $p(w)$  etc.
- Ar fi echivalent cu a inlocui  $p(b)$  si  $p(w)$  cu litere de propozitii.
- Dar atunci am ignora toata structura logica a predicatelor si termenilor.
- In logica predicatelor, nu dam definitii separate pentru  $p(b)$  si  $p(w)$ , ci dam semnificatii pentru  $p$ ,  $b$ ,  $w$ .
- Mai mult vrem sa folosim si cuantificatori.

# Interpretari si modele in logica predicatelor

- Cautam asadar un complementar al asignarii de valori de adevar din logica propozitiilor pentru o interpretare a predicatelor si constantelor.
- Nu se poate utiliza o asignare de valori de adevar pentru aceasta, fiindca un predicat nu e nici fals nici adevarat.
- In exemplul de mai devreme,  $p$  e adevarat daca e aplicat lui Batman, dar nu are sens sa ne intrebam daca e adevarat in general.

# Interpretari si modele in logica predicatelor

- O interpretare ajuta in selectarea obiectelor asupra carora predicatul este aplicabil.
- Interpretand  $p(x)$  drept "x lupta impotriva crimei", se selecteaza Batman, Superman, Spiderman etc.
- In mod formal, spunem ca aceasta e multimea membrilor universului de definitie asupra caruia predicatul este aplicabil.
- Aceasta multime poarta numele de **extensia** predicatului.

# Interpretari si modele in logica predicatelor

- Multe predicate au domenii de definitie foarte largi.
- In exemplul de mai sus, nu putem enumera exhaustiv toti luptatorii impotriva crimei din benzile desenate, ci folosim limbajul natural pentru a interpreta predicatul.
- Insa interpretarea singura nu spune care membri ai universului sunt in extensia predicatului, ci mai trebuie cunostinte suplimentare despre benzi desenate.
- In general, **extensia** unui predicat este rezultatul unei interpretari si al catorva cunostinte.

# Interpretari si modele in logica predicatelor

- Cateodata insa e posibil sa se listeze toate elementele din extensia predicatului.
- Sa mai adaugam predicatul  $q(x)$  "x traieste in locuinta Wayne" la exemplul de mai devreme.
- Atunci extensia lui  $q$  este multimea:  
 $extensia(q) = \{Bruce Wayne, Alfred majordomul, Dick Grayson\}$



# Interpretari si modele in logica predicatelor

- Astfel, nu trebuie cunostinte despre benzi desenate pentru a determina ca, in aceasta interpretare,  $q(w)$  e adevarat – Bruce Wayne e unul din membrii lui  $q$ .
- In mod similar,  $\exists xq(x)$  e adevarat in aceasta interpretare: exista cel putin un membru **din univers** care este **in extensia** lui  $q$ .
- In schimb  $\forall xq(x)$  e fals, fiindca nu este adevarat ca toti membrii din univers sunt in extensia lui  $q$  – mai sunt si alte personaje in benzile desenate decat acestea trei.



# Interpretari si modele in logica predicatelor

- Am definit semnificatia formala a unui predicat prin extensia sa.
- Cum ramane insa cu constantele  $b$  si  $w$ ?
- Intelesul unei constante determina ce membru din univers este ales de constanta.
- Individul ales de constanta se numeste **referentul** constantei.
- Ne putem gandi la litera constantei drept un nume si la referent drept lucrul numit.
- In exemplul nostru,  $b$  si  $w$  au acelasi referent, fiindca se refera la acelasi personaj.

# Modele

- Un **model** in logica predicatelor este structura formala determinata de:
  - un univers,
  - o extensie pentru fiecare predicat
  - si un referent pentru fiecare constanta.

# Modele - exemple

- Sa consideram urmatoarea interpretare:
  - Universul: Echipele spaniole din Champions League in 2009-2010.
  - $h(x)$ : "x este o echipa din orasul Madrid".
  - $f$ : Galacticii.
- Daca nu stim nimic despre fotbal, nu putem spune care propozitii in logica predicatelor sunt adevarate in aceasta interpretare.
- Este propozitia  $h(f)$  adevarata sau falsa? Depinde care dintre echipele spaniole din Champions League 2009-2010 este supranumita Galacticii. 😊
- Care este modelul care corespunde acestei interpretari?

# Modele - exemple

- Sunt patru echipe in Champions League 2009-2010: Real Madrid, Atletico Madrid, Barcelona si Sevilla.
- Dintre acestea Barcelona si Sevilla nu sunt din Madrid.
- Asadar avem modelul:
  - Universul  $U = \{\text{Real Madrid, Atletico Madrid, Barcelona, Sevilla}\}$
  - $\text{extensia}(h) = \{\text{Real Madrid, Atletico Madrid}\}$
  - $\text{referent}(f) = \{\text{Real Madrid}\}$
- Acum nu mai trebuie sa stim nimic despre fotbal pentru a evalua daca o propozitie care il include pe  $h$  e falsa sau adevarata in acest model.

# Modele - exemple

- Universul  $U = \{\text{Real Madrid, Atletico Madrid, Barcelona, Sevilla}\}$
- $\text{extensia}(h) = \{\text{Real Madrid, Atletico Madrid}\}$
- $\text{referent}(f) = \{\text{Real Madrid}\}$
- $h(f)$  e adevarat, fiindca referentul lui  $f$ , adica Real Madrid, este in extensia lui  $h$ .
- Atat  $\exists x h(x)$  cat si  $\exists x \neg h(x)$  sunt adevarate, fiindca
  - exista cel putin un element din  $U$  care este in extensia lui  $h$
  - si exista cel putin un element din  $U$  care NU este in extensia lui  $h$
- Astfel, modelul captureaza toata semnificatia formala a interpretarii.

# Modele - exemple

- Sa consideram urmatoarea interpretare:
  - $U$ : numerele naturale mai mari ca 0 si mai mici decat 10.
  - $e(x)$ : "x e par".
  - $n(x)$ : "x este negativ".
  - $l(x, y)$ : "x este mai mic decat y".
  - $t(x, y, z)$ : "x inmultit cu y este egal cu z".
- Care este modelul care se potriveste acestei interpretari?
- $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .
- Extensia predicatelor  $e$  sau  $n$  este submultimea lui  $U$  pentru care fiecare este adevarat.

# Modele - exemple

- Sa consideram urmatoarea interpretare:
  - $U$ : numerele naturale mai mari ca 0 si mai mici decat 10.
  - $e(x)$ : "x e par".
  - $n(x)$ : "x este negativ".
  - $l(x, y)$ : "x este mai mic decat y".
  - $t(x, y, z)$ : "x inmultit cu y este egal cu z".
- $\text{extensia}(e) = \{2, 4, 6, 8\}$  – alegem elementele pare din  $U$ .
- $\text{extensia}(n) = \emptyset$  – nu exista numere negative in  $U$ .

$e(x)$ : "x e par".

$n(x)$ : "x este negativ".

$l(x, y)$ : "x este mai mic decat y".

$t(x, y, z)$ : "x inmultit cu y este egal cu z".

- U: numerele naturale mai mari ca 0 si mai mici decat 10.
- Pare ca extensia lui l:
  - Ar trebui sa il contina pe 1, fiindca 1 e mai mic decat toate celelalte numere
  - Ar trebui sa il contina si pe 2, fiindca 2 e mai mic decat toate celelalte mai putin 1.
  - Orice membru din U in afara de 9 e mai mic decat un alt membru din U.
  - Am putea deci scrie  $extensia(l) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ?



# Modele - exemple

- Continuare:
  - Am putea deci scrie extensia( $I$ ) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}?
  - Insa intr-o multime, ordinea elementelor nu conteaza.
  - Deci extensia ( $I$ ) = {8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}.
  - Scrierea nu ne spune nimic despre care membri sunt mai mici decat alti membri.

# Modele - exemple

- Solutia:

- Trebuie sa aratam ca 1 e mai mic decat 8 dar si ca nu avem si situatia inversa.
- Extensia lui I va trebui sa fie alcatuita din perechi ordonate de numere.
- $extensia(I) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 1, 7 \rangle, \langle 1, 8 \rangle, \langle 1, 9 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 7 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 2, 9 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 3, 7 \rangle, \langle 3, 8 \rangle, \langle 3, 9 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 4, 6 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 4, 8 \rangle, \langle 4, 9 \rangle, \langle 5, 6 \rangle, \langle 5, 7 \rangle, \langle 5, 8 \rangle, \langle 5, 9 \rangle, \langle 6, 7 \rangle, \langle 6, 8 \rangle, \langle 6, 9 \rangle, \langle 7, 8 \rangle, \langle 7, 9 \rangle, \langle 8, 9 \rangle \}$

# Modele - exemple

- Continuare:
  - $t(x, y, z)$ : "x înmulțit cu y este egal cu z".
  - Extensia lui  $t$  va conține triplete ordonate de numere de tipul  $\langle 2, 4, 8 \rangle$ , fiindcă  $2 * 4 = 8$ .
- În general, extensia unui predicat de aritate  $n$  este o mulțime a tuturor  $n$ -tuplurilor ordonate  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  astfel încât
  - $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt membri ai universului
  - și predicatul aplicat lui  $a_1, a_2, \dots, a_n$  este adevărat în această ordine.

# Lucrul cu modele

- Fie  $A$  și  $B$  două propozitii în logica predicatelor.  $A \models B$  ( $B$  se deduce din  $A$ ) dacă nu există niciun model în care  $A$  să fie adevărat și  $B$  fals.
  - $\models A$  înseamnă că  $A$  este adevărat în orice model.
- Definitii:
  - O **tautologie** în logica predicatelor este o propoziție  $A$  care este adevărată în orice model,  $\models A$ .
  - O **contradicție** în logica predicatelor este o propoziție  $A$  care este falsă în orice model,  $\models \neg A$ .
  - O propoziție este **contingenta** în logica predicatelor dacă și numai dacă nu este nici o tautologie nici o contradicție.

# Lucrul cu modele

- Definitii:
  - Un rationament in care  $C$  se deduce din  $P_1, P_2, \dots$  este **valid** in logica predicatelor daca si numai daca nu exista niciun model in care toate premisele sa fie adevarate si concluzia falsa,  $\{P_1, P_2, \dots\} \models C$ .
  - Altfel, este **nevalid** in logica predicatelor.
  - Doua propozitii  $A$  si  $B$  **sunt logic echivalente** in logica predicatelor daca si numai daca atat  $A \models B$  cat si  $B \models A$ .
  - Multimea  $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$  este **consistenta** in logica predicatelor daca si numai daca exista cel putin un model in care toate propozitiile sunt adevarate.
  - Multimea este **inconsistenta** daca si numai daca nu exista un astfel de model.

# Construcția de modele

- Sa aratam ca  $\forall x p(x, x) \rightarrow q(d)$  nu este o tautologie.
- Trebuie sa aratam asadar ca propozitia nu este adevarata in orice model, deci ca este falsa intr-un anumit model.
- Daca evidentiem un model in care propozitia sa fie falsa, atunci am demonstrat ca nu este tautologie.
- Pentru ca  $\forall x p(x, x) \rightarrow q(d)$  sa fie falsa,  $\forall x p(x, x)$  trebuie sa fie adevarata si  $q(d)$  falsa.
- Vrem ca  $\forall x p(x, x)$  sa fie adevarata, inseamna ca fiecare membru al universului trebuie sa formeze pereche cu el insusi in extensia lui  $p$ .
- $q(d)$  trebuie sa fie fals, deci referentul lui  $d$  nu trebuie sa se afle in extensia lui  $q$ .

# Construcția de modele

- Vrem ca  $\forall x p(x, x)$  să fie adevărată, înseamnă că fiecare membru al universului trebuie să formeze pereche cu el însuși în extensia lui  $p$ .
  - Să considerăm  $U = \{\text{Paris}\}$
  - $\text{extensia}(p) = \{\langle \text{Paris}, \text{Paris} \rangle\}$
- $q(d)$  trebuie să fie fals, deci referentul lui  $d$  nu trebuie să se afle în extensia lui  $q$ .
  - $\text{extensia}(q) = \emptyset$
  - $\text{referent}(d) = \text{Paris}$  – e singurul membru din  $U$
- Avem astfel un model parțial – nu am definit și alte predicate sau constante, ci doar cele necesare.
- În acest model, propoziția dată este falsă.

# Construcția de modele

- Care ar putea fi semnificația predicatelor și a constantelor în limbaj natural?
  - $U = \{\text{Paris}\}$
  - $\text{extensia}(p) = \{\langle \text{Paris}, \text{Paris} \rangle\}$
  - $\text{extensia}(q) = \emptyset$
  - $\text{referent}(d) = \text{Paris}$
- Modelul parțial ar putea corespunde unei astfel de interpretări:
  - $U = \{\text{Paris}\}$
  - $p(x, y)$ :  $x$  este în aceeași țară ca și  $y$
  - $q(x)$ :  $x$  a fost fondat în sec. XX
  - $d$ : Orașul Luminilor



# Constructia de modele

- Sa aratam ca  $\forall x p(x, x) \rightarrow q(d)$  nu este o contradictie.
- Trebuie sa specificam un model in care fie  $\forall x p(x, x)$  este fals, fie  $q(d)$  e adevarat si  $\forall x p(x, x)$  este tot adevarat.
- Un astfel de model partial ar fi:
  - $U = \{\text{Paris}\}$
  - $\text{extensia}(p) = \{\langle \text{Paris}, \text{Paris} \rangle\}$
  - $\text{extensia}(q) = \{\text{Paris}\}$
  - $\text{referent}(d) = \text{Paris}$
- Fiindca  $\forall x p(x, x) \rightarrow q(d)$  nu este nici tautologie, nici contradictie inseamna ca este contingenta.
- In general, pentru a arata ca o propozitie este contingenta, va trebui sa specificam doua modele: unul in care sa fie adevarata si unul in care sa fie falsa.

# Constructia de modele

- Sa aratam ca  $\forall x s(x)$  si  $\exists x s(x)$  nu sunt logic echivalente.
- Trebuie sa construim un model in care cele doua propozitii sa aiba valori diferite de adevar.
- De data aceasta, ne va trebui un univers cu cel putin doi membri.
- Daca am avea un singur membru, cele doua ar avea aceeasi valoare de adevar.
- Il putem face pe  $\exists x s(x)$  adevarat incluzand ceva din univers in extensia lui  $s$ , iar pe  $\forall x s(x)$  fals omitand ceva din univers in extensia lui  $s$ .
  - $U = \{\text{Paris, Londra}\}$
  - $\text{extensia}(s) = \{\text{Paris}\}$
- Acest model partial arata ca cele doua propozitii nu sunt logic echivalente.

# Constructia de modele

$$(r(c) \wedge k_1(c)) \wedge t(c)$$

---

$$t(c) \wedge k_2(c)$$

- Sa revedem un rationament despre care am spus ca este invalid.
- Pentru a arata ca este invalid, trebuie construit un model in care premisele sa fie adevarate si concluzia falsa.
  - $U = \{\text{Mihai}\}$
  - $\text{extensia}(t) = \{\text{Mihai}\}$
  - $\text{extensia}(k_1) = \{\text{Mihai}\}$
  - $\text{extensia}(k_2) = \emptyset$
  - $\text{extensia}(r) = \{\text{Mihai}\}$
  - $\text{referent}(c) = \text{Mihai}$
- In mod similar, putem arata ca o multime de propozitii este consistenta, construind un model in care toate propozitiile sunt adevarate.

# Rationand despre toate modelele

- Pentru a arata ca o propozitie nu este o tautologie, construim un model in care propozitia e falsa.
- Cum aratam inasa ca o propozitie e o tautologie?
- Exista o infinitate de modele, nu putem sa le precizam pe toate, aratand ca propozitia e adevarata in cadrul lor.
- Putem lua inasa, spre exemplu, propozitia  $r(a, a) \leftrightarrow r(a, a)$  si sa aratam ca este o tautologie printr-un rationament simplu.
- Exista doua feluri de modele:
  - cele in care  $\langle \text{referent}(a), \text{referent}(a) \rangle$  e in extensia lui  $r$
  - si cele in care nu este.

# Rationand despre toate modelele

$$r(a, a) \leftrightarrow r(a, a)$$

- Exista doua feluri de modele:
  - cele in care  $\langle \text{referent}(a), \text{referent}(a) \rangle$  e in extensia lui R
  - si cele in care nu este.
- In consecinta:
  - In primul caz,  $r(a, a)$  e adevarat si, din tabelul de adevar pentru  $\leftrightarrow$ ,  $r(a, a) \leftrightarrow r(a, a)$  e adevarat.
  - In al doilea caz,  $r(a, a)$  e fals si, din tabelul de adevar pentru  $\leftrightarrow$ ,  $r(a, a) \leftrightarrow r(a, a)$  e adevarat.
  - Din moment ce propozitia e adevarata in oricare din cele doua tipuri posibile de model, inseamna ca e o tautologie.
- Cu toate acestea, rationamentul este facut intr-un metalimbaj si nu in logica predicatelor.

# Rationand despre toate modelele

- Consideram o alta tautologie evidenta:  $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$
- Am putea fi tentati sa rationam astfel:
  - $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$  e adevarata in orice model, deci si  $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$  trebuie sa fie adevarata.
  - Dar  $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$  nu e adevarata in orice model!
  - Ea nu reprezinta o propozitie, deci nu poate fi nici adevarata, nici falsa!
- Pentru a considera si formulele atomice care nu sunt propozitii, vom defini conceptul de **satisfiabilitate**.

# Rationament / Constructie

Intrebare	DA	NU
Este A o tautologie?	Arata ca A este adevarata in orice model.	Construieste un model in care A e falsa.
Este A o contradictie?	Arata ca A este falsa in orice model.	Construieste un model in care A e adevarata.
Este A contingenta?	Construieste doua modele, unul in care A este adevarata si altul in care este falsa.	Arata ca fie A e o tautologie, fie o contradictie.
Sunt A si B echivalente?	Arata ca A si B au aceeasi valoare de adevar in orice model.	Construieste un model in care A si B au valori diferite de adevar.
Este multimea A consistenta?	Construieste un model in care toate propozitiile din A sunt adevarate.	Arata ca propozitiile nu pot fi toate adevarate in orice model.
Este deductia lui C din P valida?	Arata ca in orice model in care P e adevarata, C este adevarata.	Construieste un model in care P e adevarata si C falsa.

# Satisfiabilitate

- Cum se interpreteaza o variabila libera, de exemplu  $x$  in  $p(x)$ ?
- Vom introduce o **asignare de variabile** – o functie care realizeaza potrivirea intre fiecare variabila si un membru al universului  $U$ .
- **Def. 1:** O formula  $p(x)$  este satisfiabila intr-un model  $M$  de o asignare de variabile  $a$  daca si numai daca  $a(x)$ , obiectul pe care  $a$  il asigneaza lui  $x$ , este in extensia lui  $p(x)$  in  $M$ .
- Cand este acum  $\forall x p(x)$  satisfiabil?
- Nu e suficient ca  $p(x)$  e satisfiabil in  $M$  pentru  $a$ :
  - Aceasta inseamna ca  $a(x)$  e in extensie( $p$ ).
  - $\forall x p(x)$  necesita ca fiecare membru al lui  $U$  sa fie in extensie( $p$ ).



# Satisfiabilitate

- **Def. 2:** Pentru fiecare membru  $o$  al universului  $U$  si fiecare variabila  $x$ , fie  $a[x|o]$  asignarea de variabile care atribuie  $o$  lui  $x$ , dar respecta in celelalte cazuri definitia lui  $a$ .
- Formal: 
$$a[x|o](y) = \begin{cases} o, & \text{daca } y = x \\ a(y), & \text{altfel} \end{cases}$$
- **Def. 3:**  $\forall x p(x)$  e satisfiabil intr-un model  $M$  de o asignare de variabile  $a$  daca si numai daca, pentru fiecare obiect  $o$  din universul  $U$  al lui  $M$ ,  $p(x)$  e satisfiabila in  $M$  prin  $a[x|o]$ .

# Satisfiabilitate

- **Def. 4:** Definim o functie  $s$  intr-un model  $M$  astfel incat, pentru orice fbf  $A$  si asignare de variabile  $a$ ,  $s(A, a) = 1$  daca  $A$  e satisfiabil in  $M$  de  $a$ ; altfel  $s(A, a) = 0$ .
- 1. Daca  $A$  este o fbf atomica de forma  $p(t_1, \dots, t_n)$  si  $o_i$  este obiectul selectata de  $t_i$ , atunci

$$s(A, a) = \begin{cases} 1, & \text{daca } \langle o_1, \dots, o_n \rangle \text{ este in extensie } (P) \text{ in } M \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Pentru fiecare termen  $t_i$ :
  - Daca  $t_i$  este o constanta, atunci  $o_i = \text{referent}(t_i)$ .
  - Daca  $t_i$  este o variabila, atunci  $o_i = a(t_i)$ .

# Satisfiabilitate

- 2. Daca A este  $\neg B$ , cu B fbf, atunci:

$$s(A, a) = \begin{cases} 1, & \text{daca } s(B, a) = 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- 3. Daca A este  $B \wedge C$ , pentru B si C fbf, atunci:

$$s(A, a) = \begin{cases} 1, & \text{daca } s(B, a) = 1 \text{ si } s(C, a) = 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- 4. Daca A este  $B \vee C$ , pentru B si C fbf, atunci:

$$s(A, a) = \begin{cases} 0, & \text{daca } s(B, a) = 0 \text{ sau } s(C, a) = 0 \\ 1, & \text{altfel} \end{cases}$$

- 5. Daca A este  $B \rightarrow C$ , pentru B si C fbf, atunci:

$$s(A, a) = \begin{cases} 0, & \text{daca } s(B, a) = 1 \text{ si } s(C, a) = 0 \\ 1, & \text{altfel} \end{cases}$$

# Satisfiabilitate

- 6. Daca  $A$  este  $B \leftrightarrow C$ , pentru  $B$  si  $C$  fbf, atunci:

$$s(A, a) = \begin{cases} 1, & \text{daca } s(B, a) = s(C, a) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- 7. Daca  $A$  este  $\forall x B$ , pentru  $B$  fbf si variabila  $x$ , atunci:

$$s(A, a) = \begin{cases} 1, & \text{daca } s(B, a[x|o]) = 1 \text{ pentru fiecare membru } o \in U \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- 8. Daca  $A$  este  $\exists x B$ , pentru  $B$  fbf si variabila  $x$ , atunci:

$$s(A, a) = \begin{cases} 1, & \text{daca } s(B, a[x|o]) = 1 \text{ pentru cel putin un membru } o \in U \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

# Adevarul

- Sa consideram o propozitie simpla precum  $\forall x p(x)$ :
  - Din punctul 7 de la definitia satisfiabilitatii, propozitia e satisfiabila daca  $a[x|o]$  satisface  $p(x)$  in  $M$  pentru fiecare  $o$  din  $U$ .
  - Din punctul 1, aceasta se intampla daca fiecare  $o$  se afla in extensia lui  $p$ .
- Faptul ca  $\forall x p(x)$  e satisfiabil sau nu depinde de asignarea particulara de variabile  $\alpha$ .
- Daca aceasta propozitie e satisfiabila, atunci ea este adevarata.
- Astfel formalizam faptul ca  $\forall x p(x)$  e adevarata daca toate elementele din  $U$  sunt in extensia lui  $p$ .

# Adevarul

- Asadar, in cazul fiecarei propozitii din logica predicatelor, din motivul ca toate variabilele sunt legate, aceasta este satisfiabila sau nu indiferent de detaliile asignarii de variabile.
- **Def. 5:** O propozitie A este **adevarata** in M daca si numai daca vreo asignare de variabile satisface pe A in M; altfel, A este **falsa** in M.
- Sa vedem acum cum putem folosi notiunile de satisfiabilitate si adevar pentru a realiza un rationament unde sunt implicate o infinitate de modele.

Demonstrati ca  $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$  este o tautologie.

- Sa consideram un model arbitrar  $M$  si un membru  $o$  arbitrar din  $U$ .
  - Daca  $\langle o, o \rangle$  se afla in extensia lui  $r$ , atunci  $r(x, x)$  este satisfiabil de asignarea de variabile care il atribuie pe  $o$  lui  $x$  (punctul 1 din def. 4).
    - Din moment ce consecinta lui  $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$  este satisfiabila, implicatia este satisfiabila (punctul 5).
  - Daca  $\langle o, o \rangle$  nu se afla in extensia lui  $r$ , atunci  $r(x, x)$  nu este satisfiabil de asignarea de variabile care il atribuie pe  $o$  lui  $x$  (punctul 1).
    - Din moment ce conditia lui  $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$  este nesatisfiabila, implicatia este satisfiabila (punctul 5).

Demonstrati ca  $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$  este o tautologie.

- $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$  este satisfiabila pentru fiecare membru din  $U$ , deci  $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$  este satisfiabila de orice asignare de variabile (punctul 7).
- Deci  $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$  este adevarata in  $M$  (def. adevarului), pentru orice  $U$  si extensie a lui  $R$ , deci e adevarata in orice model, fiind asadar o tautologie.



## Demonstrati ca $\forall x h(x)$ se deduce din $\forall x(h(x) \wedge j(x))$ .

- Sa consideram un model arbitrar  $M$  in care premisa  $\forall x(h(x) \wedge j(x))$  este adevarata (vezi tabel).
  - Conjunctia  $h(x) \wedge j(x)$  e satisfiabila indiferent de asignarea pentru  $x$ , asadar asa este si  $h(x)$  (punctul 3 din def. 4).
  - Deci  $\forall x h(x)$  este satisfiabila de orice asignare de variabile (punctul 7) si adevarata in  $M$  (def. adevarului).
  - $M$  fiind arbitrar ales, rezulta ca  $\forall x h(x)$  este adevarata in orice model in care  $\forall x(h(x) \wedge j(x))$  e adevarata.
  - Deci  $\forall x(h(x) \wedge j(x)) \models \forall x h(x)$ .
  - Chiar si pentru argumente simple, rationamentul e complicat.
  - Pentru a contracara acest aspect, vom studia in cursul urmator sistemele de demonstratie.

# Exercitii

- 1. Determinati daca fiecare propozitie este adevarata sau falsa in modelul dat:
  - $U = \{\text{Cristi, Alin}\}$
  - $\text{Extensia}(p) = \{\text{Cristi, Alin}\}$
  - $\text{Extensia}(q) = \{\text{Alin}\}$
  - $\text{Extensia}(r) = \emptyset$
  - $\text{Referent}(c) = \text{Cristi}$
- 1.  $q(c)$
- 2.  $p(c) \leftrightarrow \neg r(c)$
- 3.  $r(c) \rightarrow (p(c) \vee q(c))$
- 4.  $\forall x p(x)$
- 5.  $\forall x \neg q(x)$
- 6.  $\exists x (p(x) \wedge q(x))$
- 7.  $\exists x q(x) \rightarrow \forall x p(x)$

# Exercitii

- 2. Determinati daca fiecare propozitie este adevarata sau falsa in modelul dat:
  - $U = \{\text{Cristi, Mihai, Ionut}\}$
  - $\text{extensia}(p) = \{\text{Cristi, Mihai, Ionut}\}$
  - $\text{extensia}(q) = \{\text{Cristi, Mihai}\}$
  - $\text{extensia}(r) = \{\langle \text{Cristi, Mihai} \rangle, \langle \text{Mihai, Ionut} \rangle, \langle \text{Ionut, Cristi} \rangle\}$
  - $\text{referent}(c) = \text{Ionut}$
- 1.  $\exists x(r(x, c) \wedge r(c, x))$
- 2.  $\forall x(p(x) \leftrightarrow q(x))$
- 3.  $\forall x(r(x, c) \rightarrow q(x))$
- 4.  $\forall x(q(x) \rightarrow (p(x) \wedge q(x)))$
- 5.  $\forall x \forall y r(x, y)$
- 6.  $\forall x \forall y (r(x, y) \vee r(y, x))$

# Exercitii

- 3. Determinati daca fiecare propozitie este adevarata sau falsa in modelul dat:
  - $U = \{\text{Tiberiu}, \text{Cristina}, \text{Edi}\}$
  - $\text{extensia}(p) = \{\text{Tiberiu}, \text{Cristina}, \text{Edi}\}$
  - $\text{extensia}(q) = \{\text{Cristina}\}$
  - $\text{extensia}(r) = \{\text{Tiberiu}, \text{Edi}\}$
  - $\text{referent}(c) = \text{Cristina}$
  - $\text{referent}(e) = \text{Edi}$
- 1.  $q(c)$
- 2.  $q(e)$
- 3.  $r(c) \vee r(e)$
- 4.  $r(c) \rightarrow p(c)$
- 5.  $\exists x(p(x) \wedge q(x))$
- 6.  $\exists xq(x) \wedge \exists xr(x)$
- 7.  $\forall x(q(x) \leftrightarrow \neg r(x))$
- 8.  $\forall x\exists y(p(x) \wedge q(y))$

# Exercitii

- 4. Scrieti modelul care corespunde la urmatoarea interpretare:
- $U$ : numere naturale de la 10 la 13
- $p(x)$ :  $x$  este impar
- $q(x)$ : despre  $x$  se spune ca poarta ghinion
- $r(x, y)$ :  $x$  este urmatorul numar dupa  $y$
- $s(x)$ :  $x$  este mai mic decat 9
- $t(x)$ :  $x$  este un numar format din doua cifre

# Exercitii

- 5. Aratati ca fiecare din urmatoarele este contingent:
  - $p(a) \wedge p(b)$
  - $\exists x(t(x, c))$
  - $p(c) \wedge \neg \forall x p(x)$
  - $\exists x(p(x) \rightarrow \forall y q(y))$

# Exercitii

- 6. Aratati ca urmatoarele perechi de propozitii nu sunt logic echivalente:
  - $p(a), q(a)$
  - $\exists x p(x), p(x)$
  - $\forall x r(x, x), \exists x r(x, x)$
  - $\exists x p(x) \rightarrow q(x), \exists x (p(x) \rightarrow q(x))$
  - $\forall x \exists y r(x, y), \exists x \forall y r(x, y)$

# Exercitii

- 7. Aratati ca urmatoarele multimi de propozitii sunt consistente:
  - $\{p(a), \neg q(a), r(a), \neg s(a)\}$
  - $\{p(c, c), p(c, a), \neg p(a, c), \neg p(a, a)\}$
  - $\{p(a) \vee p(b), p(a) \rightarrow \forall x \neg p(x)\}$
  - $\{\exists x(q(x) \vee p(x)), \forall x \neg r(x), \forall x[(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow r(x)]\}$



# Exercitii

- 8. Construiti modele pentru a arata ca urmatoarele rationamente sunt nevalide:

$$\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$$

---

$$\exists xq(x)$$

$$p(a)$$

$$p(b)$$

$$p(c)$$

---

$$\forall xp(x)$$

$$\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$$

$$\forall x(p(x) \rightarrow r(x))$$

---

$$q(x) \wedge r(x)$$

$$q(a, b) \rightarrow \forall xq(x, b)$$

$$\exists xq(x, b)$$

---

$$q(b, b)$$