Logica predicatelor

Sintaxa

De la propozitii la predicate

- Daca toata lumea stie logica, ori numeni nu va fi confuz, ori toata lumea va fi.
- Toata lumea va fi confuza numai daca vom crede o contradictie.
- Suntem la un curs de logica, deci toata lumea stie logica.
- Prin urmare, daca nu credem o contradictie, atunci nimeni nu va fi confuz.

Daca toata lumea stie logica, ori numeni nu va fi confuz, ori toata lumea va fi.
Toata lumea va fi confuza numai daca vom crede o contradictie.
Suntem la un curs de logica, deci toata lumea stie logica.
Prin urmare, daca nu credem o contradictie, atunci nimeni nu va fi confuz.

- Trecerea din limbaj natural in logica propozitiilor:
  - *l*: toata lumea stie logica.
  - *n*: nimeni nu va fi confuz.
  - *t*: toata lumea va fi confuza.
  - *c*: credem o contradicite.
- Observam ca propozitiile *n* si *t* se refera la faptul ca persoane ar fi confuze sau nu, dar avem doua propozitii separate.
- Am putea inlocui *t* cu $\neg n$?
- $\neg n$: nu este cazul ca nimeni nu va fi confuz.
  - Altfel spus, daca o singura persoana ar fi confuza, suntem in cazul lui $\neg n$.

Daca toata lumea stie logica, ori numeni nu va fi confuz, ori toata lumea va fi. Toata lumea va fi confuza numai daca vom crede o contradictie. Suntem la un curs de logica, deci toata lumea stie logica. Prin urmare, daca nu credem o contradictie, atunci nimeni nu va fi confuz.

- *l*: toata lumea stie logica.
- *n*: nimeni nu va fi confuz.
- *t*: toata lumea va fi confuza.
- *c*: credem o contradicite.
- Vom obtine un rationament valid in logica propozitiilor:

$$\begin{array}{c} l \to (n \vee t) \\ t \to c \\ t \\ \hline \neg c \to n \end{array}$$

De la propozitii la predicate

- Mihai este informatician.
- Toti informaticienii sunt destepti. ☺
- Prin urmare, Mihai este destept.

- In logica propozitiilor:
  - i: Mihai este informatician.
  - t: Toti informaticienii sunt destepti.
  - d: Mihai este destept.

$$\frac{\begin{matrix} i \\ t \end{matrix}}{d}$$

- Nu obtinem un rationament valid, chiar daca in limbajul natural, acesta este cat se poate de evident.

De la propozitii la predicate

- Propozitia “Toti informaticienii sunt destepti.” se refera si la informaticieni, si la faptul ca ei sunt destepti.
- Prin faptul ca fiecare propozitie este tratata separat, se pierde legatura dintre faptul ca Mihai este informatician si astfel ca Mihai este destept.

- Daca un rationament este valid in logica propozitiilor, el este valid si in realitate.
- Daca nu este valid in logica propozitiilor, nu inseamna ca nu este valid si in realitate. Este posibil sa apara cuantificatori ca in exemplul anterior care nu se pot folosi in logica propozitiilor.

De ce este nevoie de logica predicatelor?

- Logica propozitiilor nu poate codifica in mod adecvat toate exprimarile din limbajul natural si nici chiar din matematica/informatica.
- **Ex1:**
  - Cunoscand ca: Toti studentii din anul I vor lua note mari la examenul de Logica computationala,
  - Cum putem concluziona prin logica propozitiilor valoarea de adevar a exprimarii: Andrei va lua nota mare la examenul de Logica computationala?

De ce este nevoie de logica predicatelor?

- **Ex2:**
  - Cunoscand ca: Mihai nu va trece toate examenele din sesiune,
  - Cum putem concluziona prin logica propozitiilor valoarea de adevar a exprimarii: Exista un student in anul I care nu va trece toate examenele din sesiune?
- Pentru a putea rationa cu astfel de exprimari, se foloseste logica predicatelor.

Predicate si cuantificatori

- Logica predicatelor ne permite explorarea si rationamentul asupra **relatiilor** dintre obiecte.

- Presupune utilizarea a doua concepte:
  - Predicate – modul de reprezentare a asertiunilor
  - Cuantificatori – modul de a rationa cu afirmatii precum:
    - Toate obiectele de un tip dat au o anumita proprietate.
    - Exista un obiect cu o proprietate particulara.

Predicate

- In matematica si informatica se intalnesc deseori exprimari ce refera variabile, precum:
  - $x > 3$.
  - $x = y + 1$.
  - $x + y = z$.
  - Calculatorul x este atacat.
- Aceste asertiuni nu sunt nici adevarate nici false atat timp cat valorile pentru variabilele date nu sunt specificate.

Predicate

- Cum putem transforma in propozitii astfel de afirmatii?
- Sa luam, spre exemplu, asertiunea “x este mai mare decat 3”:
  - x este subiectul afirmatiei.
  - “este mai mare decat 3” este un predicat si se refera la o proprietate a subiectului asertiunii.
  - Afirmatia poate fi codificata prin P(x), unde prin P se noteaza predicatul curent.

Predicate

- Cum putem transforma in propozitii astfel de afirmatii?
- Asertiunea “x este mai mare decat 3”:
  - P(x) se mai spune ca este si valoarea functiei propozitionale P in punctul x.
  - De indata ce avem o valoare asignata pentru variabila x, P(x) devine o propozitie si are o valoare de adevar.

Exemple

- **Ex1:** Fie P(x) asertiunea “x > 3”. Care sunt valorile de adevar pentru P(4) si P(2)?
  - Obtinem P(4), atribuind lui x valoarea 4.
  - Rezulta ca setam x = 4 in afirmatia “x > 3”.
  - “4 > 3”, asadar P(4) este adevarata.
  - P(2) este afirmatia “2 > 3”, deci este falsa.

Exemple

- **Ex2:** Sa notam prin $A(x)$ afirmatia “Calculatorul x este atacat.” Sa presupunem ca din calculatoarele din retea doar C_2 si C_4 sunt atacate. Care sunt valorile de adevar pentru $A(C_1)$, $A(C_2)$ si $A(C_4)$?
  - $A(C_1)$ apare din setarea $x = C_1$ in asertiunea data. Cum C_1 nu este in lista calculatoarelor atacate, rezulta ca $A(C_1)$ = fals.
  - In schimb, $A(C_2)$ si $A(C_4)$ sunt adevarate, din moment ce C_2 si C_4 sunt in lista data.

Exemple

- **Ex3:** Sa notam asertiunea “$x = y + 1$” prin $Q(x, y)$. Ce valori de adevar au $Q(1, 2)$ si $Q(1, 0)$?
  - Sa observam mai intai ca pentru a nota afirmatii cu mai multe variabile, folosim functii propozitionale de acelasi numar de parametri.
  - $Q(1, 2)$ se obtine setand $x = 1$ si $y = 2$ si devine afirmatia “$1 = 2 + 1$”, care este falsa.
  - In schimb, $Q(1, 0)$ este propozitia “$1 = 0 + 1$”, care este adevarata.

Exemple

- **Ex4:** Sa codificam afirmatia “Calculatorul x este conectat la reteaua y” prin A(x, y). Sa presupunem ca C1 este conectat la reteaua R1, dar nu si la R2. Care sunt valorile de adevar pentru A(C1, R1) si A(C1, R2)?
  - A(C1, R1) = adevarat, fiindca C1 este conectat la R1.
  - In schimb, A(C1, R2) = fals.

Exemple

- **Ex5**: Sa notam asertiunea “x + y = z” prin R(x, y, z). Care sunt valorile de adevar pentru R(1, 2, 3) si R (0, 0, 1)?
  - R(1, 2, 3) se obtine prin setarea x = 1, y = 2 si z = 3 si devine “1 + 2 = 3” care este adevarata.
  - In schimb, “ 0 + 0 = 1” este falsa, deci R(0, 0, 1) este la randul sau falsa.

Exemplu din programare

- **Ex6**: Fie afirmatia: **if** x > 0 **then** x:=x + 1.
- P(x) este "x > 0".
- Valoarea actuala a variabilei x este inserata in P(x).
- Daca P(x) este adevarat pentru valoarea data, atunci se executa instructiunea de incrementare.
- Daca este fals, valoarea variabilei x ramane neschimbata.

Generalizare

- In general, o asertiune cu n variabile x_1, x_2, ..., x_n se noteaza prin $P(x_1, x_2, ..., x_n)$.
- O astfel de asertiune este valoarea functiei propozitionale P in punctul dat de n-tuplul $(x_1, x_2, ..., x_n)$.
- P se numeste predicat de aritate n.

Predicat

- Un predicat este o expresie de forma "este un caine".
- De sine statator, "este un caine" nu este propozitie.
  - Nu este adevarata sau falsa.
- Pentru a putea fi adevarat, avem nevoie sa specificam la cine/ce ne referim cand spunem ca "este un caine".
- Fie predicatul p de forma p(x) = "x este un caine".
- p are aritate 1, iar p poate fi interpretat ca "_____ este un caine".
- Daca azorel este un caine, atunci p(azorel) va fi "azorel este un caine".
  - Termenii incep cu litera mica (azorel, nu Azorel, ca in Prolog).

Termeni

- Termenii sunt elementele pe care le dam ca argumente pentru predicate.
- Orice constanta este un termen.
  - Constantele se noteaza in general cu litere mici de la inceputul alfabetului: a, b, c, a1, b2, ...
  - Pot insa insa fi si elemente precum: azorel, dan etc.
- Orice variabila este un termen.
  - Variabilele se noteaza cu litere de la sfarsitul alfabetului: x, y, z, x1,y4 etc.

Predicate

- Daca avem mai multi termeni la care se refera un predicat, acesta din urma reprezinta relatia dintre acesti termeni.
- Ex:
  - "___este mai mare decat___".
  - "___si___ii datoreaza bani lui___".
- In general, putem intelege predicatele ca functii propozitionale care necesita completarea cu un unumar de termeni.

Predicate

- Ex:
- s(x) = “x este suparat”
- f(x) = “x este fericit”
- i(x,y) = “x este la fel de inalt sau mai inalt decat y”
- p(x,y) = “x este la fel de puternic sau mai puternic decat y”
- r(x, y, z) = “y se afla intre x si z”
- Reprezentati cu predicate si termeni urmatoarele propozitii:
  - Mihai este suparat.
  - Daca Mihai este suparat, atunci la fel sunt si Adi si Maria.
  - Maria este cel putin la fel de puternica si de inalta ca Adi.
  - Mihai este mai scund decat Adi.
  - Adi este intre Mihai si Maria.

s(x) = “x este suparat”
f(x) = “x este fericit”
i(x,y) = “x este la fel de inalt sau mai inalt decat y”
p(x,y) = “x este la fel de puternic sau mai puternic decat y”
r(x, y, z) = “y se afla intre x si z”

- Mihai este suparat.
  - s(mihai)
- Daca Mihai este suparat, atunci la fel sunt si Adi si Maria.
  - $s(mihai) \rightarrow (s(adi) \wedge s(maria))$
- Maria este cel putin la fel de puternica si de inalta ca Adi.
  - $i(maria, adi) \wedge p(maria, adi)$
- Mihai este mai scund decat Adi.
  - $\neg\, i(mihai, adi)$
- Adi este intre Mihai si Maria.
  - r(mihai, adi, maria)

Calculul cu predicate – Predicate si cuantificatori

- Pentru a crea propozitii din functii propozitionale avem doua optiuni:
  - Asignarea de valori pentru variabile.
  - Utilizarea cuantificatorilor.
- Exista doua tipuri principale de cuantificatori:
  - Cuantificatorul universal – un predicat este adevarat pentru orice element considerat.
  - Cuantificatorul existential – exista unul sau mai multe elemente considerate pentru care predicatul e adevarat.

Cuantificatorul universal

- In matematica exista asertiuni care exprima faptul ca o proprietate este adevarata pentru toate valorile unei variabile intr-un anumit domeniu – cuantificare universala.
- Cuantificarea universala a lui P(x) pentru un anumit domeniu este propozitia care exprima faptul ca P(x) este adevarat pentru toate valorile x din acest domeniu.
- Domeniul trebuie intotdeauna specificat, iar semnificatia cuantificarii se schimba daca schimbam domeniul!

Cuantificatorul universal

- **Def1**. Cuantificarea universala a lui P(x) este asertiunea “P(x) pentru toate valorile x din domeniu”.
- Cuantificarea universala a lui P(x) se noteaza prin $\forall x\ P(x)$, iar $\forall$ este cuantificator universal.
- $\forall x\ P(x)$ se interpreteaza drept “pentru orice x P(x)” sau “pentru fiecare x P(x).”
- Un element pentru care P(x) e fals se numeste contraexemplu pentru $\forall x\ P(x)$.

Cuantificatorul universal

- Se presupune ca toate domeniile pentru care se definesc cuantificatorii sunt nevide.
- Daca un domeniu ar fi vid, atunci inseamna ca $\forall x\ P(x)$ este adevarat pentru orice functie propozitionala, fiindca nu exista elemente x in domeniu pentru care P(x) e fals.
- $\forall x\ P(x)$ e **fals** daca si numai daca P(x) nu e mereu adevarata cand x apartine domeniului.
- Un mod de a arata acest lucru este gasirea unui contraexemplu pentru acea afirmatie.

Exemple

- **Ex1**: Fie P(x) afirmatia “$x + 1 > x$”. Care este valoarea de adevar pentru $\forall x P(x)$, atunci cand domeniul e multimea numerelor reale?
- Fiindca P(x) e adevarat pentru orice numar real x, inseamna ca aceasta cuantificare este adevarata.

Exemple

- **Ex2**: Fie $P(x)$ afirmatia "$x < 2$". Care este valoarea de adevar pentru $\forall xP(x)$, atunci cand domeniul e multimea numerelor reale?
- $P(x)$ nu este adevarata pentru orice numar real x, fiindca, de exemplu, $P(3)$ e fals.
- Deci $x = 3$ este un contraexemplu pentru afirmatia $\forall xP(x)$.
- Asadar $\forall xP(x)$ este falsa.

Exemple

- **Ex3**: Fie P(x) afirmatia “$x^2 > 0$”. Care este valoare de adevar pentru $\forall x P(x)$, atunci cand domeniul e multimea numerelor intregi?
- Luam un contraexemplu in $x = 0$.
- Cand $x = 0$, $x^2 = 0$ deci x^2 nu e mai mare decat 0.

Exemple

- Atunci cand toate elementele din domeniu pot fi specificate – $x_1, x_2, \dots, x_n$ – cuantificarea universala $\forall x P(x)$ este echivalenta cu conjunctia: $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$.
- **Ex4**: Care este valoarea de adevar pentru $\forall x P(x)$ unde $P(x)$ e afirmatia "$x^2 < 10$" si domeniul consta din intregi pozitivi < 4.
- Afirmatia este echivalenta cu $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$.
- Fiindca $P(4)$ e fals, rezulta ca $\forall x P(x)$ e falsa.

Exemple

- **Ex5**: Care este valoarea de adevar pentru "$\forall x(x^2 \geq x)$" atunci cand domeniul e multimea numerelor intregi?
- $x^2 \geq x$ daca si numai daca $x^2 - x = x(x - 1) \geq 0$.
- Asadar, $x^2 \geq x$ daca si numai daca $x \leq 0$ sau $x \geq 1$.
- Deci pentru toate numerele $0 < x < 1$, afirmatia este falsa.
- Insa, cum nu exista niciun numar intreg in acest interval, afirmatia e adevarata.

Cuantificatorul existential

- **Def1**. Cuantificarea existentiala a lui P(x) este propozitia "Exista un element x in domeniu astfel incat P(x)".
- Cuantificarea existentiala a lui P(x) se noteaza prin $\exists x\ P(x)$, iar $\exists$ este cuantificator existential.
- $\exists x\ P(x)$ se interpreteaza drept "exista un x P(x)" sau "exista cel putin un x astfel incat P(x)" sau "pentru unii x P(x)".
- Si aici trebuie specificat un domeniu, care se presupune ca este nevid.

Cuantificatorul existential

- Daca un domeniu ar fi vid, atunci inseamna ca $\exists x P(x)$ este fals pentru orice functie propozitionala, fiindca nu exista niciun element x in domeniu pentru care P(x) sa fie adevarat.
- Atunci cand toate elementele din domeniu pot fi specificate – $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – cuantificarea universala $\exists x P(x)$ este echivalenta cu disjunctia: $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$.

Exemple

- **Ex1**: Fie $P(x)$ afirmatia "$x > 3$". Care este valoarea de adevar pentru $\exists x P(x)$, atunci cand domeniul e multimea numerelor reale?
- Fiindca $P(x)$ e cateodata adevarat, de exemplu cand $x = 4$, inseamna ca aceasta cuantificare este adevarata.

Exemple

- **Ex2**: Fie P(x) afirmatia “x = x + 1”. Care este valoarea de adevar pentru $\exists x P(x)$, atunci cand domeniul e multimea numerelor reale?
- Fiindca P(x) e fals pentru orice numar real x, inseamna ca aceasta cuantificare este falsa.

Exemple

- **Ex3**: Care este valoarea de adevar pentru $\exists x P(x)$ unde $P(x)$ e afirmatia "$x^2 > 10$" si domeniul consta din intregi pozitivi < 4.
- Afirmatia este echivalenta cu $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$.
- Fiindca $P(4)$ e adevarat, rezulta ca $\exists\, x P(x)$ e adevarata.

Sfaturi practice

- Sa presupunem ca domeniul variabilei x este format din n valori discrete.
- Pentru a determina daca $\forall x P(x)$ e adevarat, testam valoarea de adevar a fiecarei valori.
- Daca intalnim un x pentru care P(x) e fals, inseamna ca $\forall x P(x)$ e fals; altfel, este adevarat.
- Pentru a determina daca $\exists x P(x)$ e adevarat, cautam un x pentru care P(x) e adevarat.
- Daca il gasim, rezulta ca $\exists x P(x)$ e adevarat; altfel este fals.

Semnificatia cuantificatorilor universal si existential

Asertiune	*Cand Adevarat?*	*Cand Fals?*
$\forall x\, P(x)$	P(x) este adevarat pentru orice x.	Exista un x pentru care P(x) e fals.
$\exists x\, P(x)$	Exista un x pentru care P(x) este adevarat.	P(x) e fals pentru orice x.

Cuantificatori cu domenii restrictionate

- Deseori se utilizeaza notatii abreviate pentru a restrictiona domeniul cuantificatorilor.
- **Exemple:**
- $\forall x < 0 (x^2 > 0)$ spune ca pentru orice numar real x cu $x < 0$, $x^2 > 0$, si este echivalent cu $\forall x(x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$.
- $\exists x > 0 \ (x^2 = 2)$ spune ca exista un numar real x cu $x > 0$ astfel incat $x^2 = 2$ si este echivalent cu
  $\exists x(x > 0 \wedge x^2 = 2)$.

$\forall$ cu $\rightarrow$ si $\exists$ cu $\wedge$

- In trecerea din limbaj natural, in general se utilizeaza:
  - $\rightarrow$ alaturi de cuantificatorul universal $\forall$
  - $\wedge$ alaturi de cuantificatorul existential $\exists$
- Ex:
  - Fiecare student de la acest curs este interesat.
    - s(x) = “x este student la acest curs”
    - i(x) = “x este interesat”
  - $\forall x(s(x) \rightarrow i(x))$
    - adica, pentru orice student, daca acel student este de la acest curs, atunci el este interesat.
  - Ce ar fi insemnat $\forall x(s(x) \wedge i(x))$?
    - Orice student este la acest curs si este interesat – nu la acest lucru ne refeream.

$\forall$ cu $\rightarrow$ si $\exists$ cu $\wedge$

Unii studenti de la acest curs sunt plictisiti.

- s(x) = “x este student la acest curs”
- p(x) = “x este plictisit”

- $\exists x(s(x) \wedge p(x))$ (adica exista un student care este si la acest curs si este si plictisit).
- Ce ar insemna $\exists x(s(x) \rightarrow p(x))$?
  - Ca exista un student a astfel incat $s(a) \rightarrow p(a)$ este adevarata.
  - In logica propozitiilor avem $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$. Este valabil si aici.
  - Deci $\exists x(s(x) \rightarrow p(x))$ este adevarat daca exista a astfel incat

$$\neg s(a) \vee p(a)$$

  - Adica exista un student a care nu este student la acest curs sau este plictisit. (lucru adevarat, dar nu este ceea ce voiam sa spunem)

Exemplul initial

- Mihai este informatician.
- Toti informaticienii sunt destepti.
- Prin urmare, Mihai este destept.

- i(x): x este informatician.
- d(x): x este destept.

$$\frac{i(mihai) \qquad \forall x(i(x) \to d(x))}{d(mihai)}$$

Precedenta cuantificatorilor

- Cei doi cuantificatori au precedenta mai ridicata decat toti operatorii logici din calculul propozitional.
- De exemplu, $\forall xP(x) \wedge Q(x)$ este disjunctia lui $\forall xP(x)$ si $Q(x)$.
- Asadar inseamna $(\forall xP(x)) \wedge Q(x)$ si nu $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$.

Variabile libere si variabile legate

- Daca asupra unei variabile este aplicat un cuantificator, spunem ca variabila este legata.
- Daca o variabila nu este legata de un cuantificator sau nu ii este setata o anumita valoare, atunci se spune ca ea este libera.
- In afirmatia $\exists x(x + y = 1)$, x e legata, y e libera.
- In afirmatia $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall xR(x)$ toate variabilele sunt legate; este echivalenta cu a scrie $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall yR(y)$ fiindca scopurile celor doi cuantificatori nu se suprapun.

Echivalente logice ce implica cuantificatori

- **Def3**: Asertiunile ce implica predicate si cuantificatori sunt logic echivalente (cu notatia ≡) daca si numai daca au aceeasi valoare de adevar
  - Indiferent ce predicate sunt substituite in aceste afirmatii
  - Si indiferent de domeniul folosit pentru variabilele din aceste functii propozitionale.

Exemplu

- **Ex**: Aratati ca $\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$ (sunt logic echivalente), unde avem acelasi domeniu.
- **Obs1**: Putem de asemenea distribui un cuantificator existential peste o disjunctie.
- **Obs2**: Insa nu putem distribui:
  - Un cuantificator universal peste o disjuctie.
  - Un cuantificator existential peste o conjunctie (vezi exercitii).

Exemplu

- **Dem.**: Sa presupunem ca $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ este adevarat.
- Inseamna ca daca un element a e in domeniu, $P(a) \wedge Q(a)$ e adevarat; deci $P(a)$ e adevarat si $Q(a)$ e adevarat.
- Fiindca $P(a)$ si $Q(a)$ sunt adevarate pentru orice a din domeniu, inseamna ca si $\forall xP(x)$ si $\forall xQ(x)$ sunt adevarate.
- Asadar, $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ e adevarat.

Exemplu

- Invers, sa presupunem ca $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ este adevarat.
- Inseamna ca $\forall x P(x)$ e adevarat si $\forall x Q(x)$ e adevarat.
- Astfel, daca a este in domeniu, P(a) si Q(a) sunt adevarate; deoarece P(x) si Q(x) sunt adevarate pentru orice element din domeniu, putem folosi a in ambele.
- Rezulta ca pentru orice a, $P(a) \wedge Q(a)$ e adevarat, deci $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ e adevarat.

Negarea expresiilor cuantificate

- Sa consideram, spre exemplu, posibilitatea negarii afirmatiei "Toti studentii din anul I au urmat un curs de C".
- Aceasta asertiune este o cuantificare universala: $\forall x P(x)$, unde P(x) este "x a urmat un curs de C".
- Negatia sa este "Exista un student in anul I care nu a urmat un curs de C".
- Aceasta este cuantificarea existentiala a negatiei functiei propozitionale date: $\exists x \neg P(x)$.

Negarea expresiilor cuantificate

- Exemplul ilustreaza: $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$.
- **Dem**: $\neg\forall x P(x)$ e adevarat daca si numai daca $\forall x P(x)$ e fals.
- $\forall x P(x)$ e fals daca si numai daca exista un element x in domeniu pentru care P(x) e fals.
- Adica daca si numai daca exista un element x in domeniu pentru care $\neg$ P(x) e adevarat.
- Aceasta e adevarata daca si numai daca $\exists x \neg P(x)$.
- Deci, $\neg\forall x P(x)$ e adevarata daca si numai daca $\exists x \neg P(x)$ e adevarata.

Negarea expresiilor cuantificate

- Sa consideram, spre exemplu, posibilitatea negarii afirmatiei "Exista un student din anul I care a urmat un curs de C".
- Aceasta asertiune este o cuantificare existentiala: $\exists x P(x)$, unde P(x) este "x a urmat un curs de C".
- Negatia sa este "Orice student din anul I nu a urmat un curs de C".
- Aceasta este cuantificarea universala a negatiei functiei propozitionale date: $\forall x \neg P(x)$.

Negarea expresiilor cuantificate

- Exemplul ilustreaza: $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$.
- **Dem**: $\neg\exists x P(x)$ e adevarat daca si numai daca $\exists x P(x)$ e fals.
- $\exists x P(x)$ e fals daca si numai daca nu exista niciun element x in domeniu pentru care P(x) e adevarat.
- Adica daca si numai daca pentru orice element x in domeniu $\neg P(x)$ e adevarat.
- Aceasta e adevarata daca si numai daca $\forall x \neg P(x)$.
- Deci, $\neg\exists x P(x)$ e adevarata daca si numai daca $\forall x \neg P(x)$ e adevarata.

Negarea expresiilor cuantificate

Negatia	*Afirmatia echivalenta*	*Cand e Negatia Adevarata?*	*Cand e Falsa?*
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	Pentru fiecare x, P(x) e fals.	Exista un x pentru care P(x) e adevarat.
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Exista un x pentru care P(x) e fals.	P(x) e adevarat pentru orice x.

Legile lui De Morgan pentru cuantificatori

- Cand domeniul lui P(x) consta din n elemente, regulile de negare ale afirmatiilor cuantificate sunt identice cu regulile lui De Morgan din logica propozitiilor.

- Aceasta este motivul pentru care aceste reguli se numesc legile lui De Morgan pentru cuantificatori.

Legile lui De Morgan pentru cuantificatori

- $\neg\forall x P(x)$ presupune $\neg(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n))$ care e echivalent prin legile lui De Morgan cu $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \ldots \vee \neg P(x_n)$ care este identic cu $\exists x \neg P(x)$.

- $\neg\exists x P(x)$ presupune $\neg(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n))$ care e echivalent prin legile lui De Morgan cu $\neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \ldots \wedge \neg P(x_n)$ care este identic cu $\forall x \neg P(x)$.

Exemple

- **Ex1**: Care sunt negatiile afirmatiilor “Exista un politician cinstit” si “Toti romanii mananca mititei”?
- Notam “x este cinstit” prin $H(x)$.
- Afirmatia se scrie atunci $\exists x H(x)$, unde domeniul consta din toti politicienii.
- Negatia sa este $\neg \exists x H(x)$ care este echivalenta cu $\forall x \neg H(x)$.
- Acesta se exprima prin “Orice politician este necinstit”.

Exemple

- **Ex1**: Care sunt negatiile afirmatiilor “Exista un politician cinstit” si “Toti romanii mananca mititei”?
- Notam “x mananca mititei” prin $C(x)$.
- Afirmatia atunci se scrie $\forall x C(x)$, unde domeniul consta din toti romanii.
- Negatia sa este $\neg\forall x C(x)$ care este echivalenta cu $\exists x \neg C(x)$.
- Acesta se exprima prin “Exista un roman care nu mananca mititei”.

Exemple

- **Ex2**: Care sunt negatiile afirmatiilor $\forall x(x^2 > x)$ si $\exists x(x^2 = 2)$?
- Negatia lui $\forall x(x^2 > x)$ este $\neg\forall x(x^2 > x)$ care este echivalenta cu $\exists x\neg(x^2 > x)$ care poate fi scrisa ca $\exists x(x^2 \leq x)$.
- Negatia lui $\exists x(x^2 = 2)$ este $\neg\exists x(x^2 = 2)$ care este echivalenta cu $\forall x\neg(x^2 = 2)$ care poate fi rescrisa drept $\forall x(x^2 \neq 2)$.

Exemple

- **Ex3**: Aratati ca $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ si $\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$ sunt logic echivalente.
- Din negarea pentru expresii cuantificate, avem echivalenta $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists x \neg(P(x) \rightarrow Q(x))$.
- $\neg(P(x) \rightarrow Q(x))$ este $\neg(\neg P(x) \lor Q(x))$ si, din legile lui De Morgan din logica propozitiilor, aceasta e echivalenta cu $P(x) \land \neg Q(x)$ pentru orice x.
- Fiindca putem substitui o expresie logica cu una echivalenta, $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists x(P(x) \land \neg Q(x))$.

Traducerea din limbajul natural prin exemple

- **Ex1**: Exprimati afirmatia “Orice student din anul I a studiat C” folosind predicate si cuantificatori.
- Sa o reformulam drept “Pentru orice student din anul I, acel student a studiat C”.
- Introducem si variabila x, asadar obtinem “Pentru orice student x din anul I, x a studiat C”.
- Notam prin p(x) “x a studiat C”.
- Daca domeniul pentru x consta din studentii anului I, atunci afirmatia poate fi tradusa drept $\forall x p(x)$.

Traducerea din limbajul natural prin exemple

- Daca in schimb consideram domeniul la a consta din toti oamenii, atunci afirmatia devine “Pentru fiecare persoana x, daca persoana x este student in anul I, atunci x a studiat C”.
- Notam prin s(x) “x este o persoana studenta in anul I”, atunci traducerea este $\forall x(s(x) \rightarrow p(x))$.
- Nu putem traduce prin $\forall x(s(x) \wedge p(x))$, fiindca aceasta inseamna ca toate persoanele sunt studentii in anul I si au studiat C.
  - Amintim: $\forall$ se foloseste cu $\rightarrow$

Traducerea din limbajul natural prin exemple

- In fine, daca ne intereseaza si alte obiecte de studiu din facultate in afara de C, putem sa consideram q(x, y) drept “studentul x a studiat obiectul y”.
- Astfel, retraducem afirmatia, depinzand de domeniu, prin:
  - $\forall x q(x, lc)$.
  - $\forall x (s(x) \rightarrow q(x, lc))$.

Traducerea din limbajul natural prin exemple

- **Ex2**: Exprimati afirmatia “Un student din anul I a luat 10 la logica computationala” folosind predicate si cuantificatori.
- Rezulta ca exista un student x in anul I cu proprietatea ca x a luat 10 la lc.
- Notam prin m(x) “x a luat 10 la lc”.
- Daca domeniul pentru x consta din studentii anului I, atunci vom traduce afirmatia prin $\exists x m(x)$.

Traducerea din limbajul natural prin exemple

- Daca vom considera insa multimea tuturor oamenilor, atunci afirmatia se reformuleaza drept “Exista o persoana x in anul I cu proprietatea ca x a luat 10 la LC”.
- s(x) este “x e un student in anul I”.
- Solutia este atunci $\exists x(s(x) \wedge m(x))$.
- Traducerea nu este insa $\exists x(s(x) \rightarrow m(x))$.

Traducerea din limbajul natural prin exemple

- **Ex3**: Exprimati afirmatia "Orice student din anul I trece examenul fie la LC fie la POO" folosind predicate si cuantificatori.
- Reformulam "Pentru fiecare x din anul I, x are proprietatea ca trece examenul la LC sau trece examenul la POO".
- Daca domeniul lui x e multimea studentilor din anul I, atunci avem $\forall x(t(x) \vee m(x))$:
  - $t(x)$ este "x trece la LC".
  - $m(x)$ este "x trece la POO".

Traducerea din limbajul natural prin exemple

- Daca insa luam domeniul tuturor oamenilor, atunci reformulam “Pentru fiecare persoana x, daca x este student in anul I, atunci x trece examenul la LC sau x trece examenul la POO”.
- Traducerea va fi $\forall x(s(x) \rightarrow t(x) \vee m(x))$.
- Sau putem exprima diferentiat dupa materia de studiu prin $\forall x(s(x) \rightarrow t(x, lc) \vee t(x, poo))$, unde:
  - $t(x, y)$ este “x trece la materia y”.

Traducerea din limbajul natural prin exemple

- **Ex4**: Exprimati afirmatiile “Orice mesaj e-mail mai mare de 1 MB va fi comprimat” si “Daca un utilizator este activ, cel putin o legatura de retea va fi disponibila” folosind predicate si cuantificatori.
- Notam prin s(m, y) “Mesajul e-mail m este mai mare de y MB”, unde m apartine domeniului tuturor mesajelor e-mail si y e un numar real pozitiv.

Orice mesaj e-mail mai mare de 1 MB va fi comprimat Daca un utilizator este activ, cel putin o legatura de retea va fi disponibila

- Notam prin c(m) "Mesajul m va fi comprimat".
- Atunci solutia este $\forall m(s(m, 1) \rightarrow c(m))$.
- a(u) reprezinta "Utilizatorul u este activ", unde u parcurge domeniul tuturor utilizatorilor.
- s(n, x) "Legatura de retea n este in starea x", unde n este in domeniul tuturor legaturilor de retea si x in al tuturor starilor posibile pentru o legatura de retea.
- Solutia pentru "Daca un utilizator este activ, cel putin o legatura de retea va fi disponibila" este deci

$$\exists u a(u) \rightarrow \exists n s(n, \text{disponibila}).$$

Traducerea din limbajul natural prin exemple

- **Ex5**: Considerati urmatoarele afirmatii – primele doua sunt premise iar cea de-a treia concluzie. Exprimati-le utilizand predicate si cuantificarori:
  - Toti leii sunt fiorosi.
  - Unii lei nu beau cafea.
  - Unele creaturi fioroase nu beau cafea.
- Fie p(x) “x e un leu”,
- q(x) “x e fioros” si
- r(x) “x bea cafea” si sa presupunem ca domeniul consta din toate animalele.

Toti leii sunt fiorosi.
Unii lei nu beau cafea.
Unele creaturi fioroase nu beau cafea.

p(x) “x e un leu”,
q(x) “x e fioros”
r(x) “x bea cafea”

- Solutie:
  - $\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$
  - $\exists x(p(x) \wedge \neg r(x))$
  - $\exists x(q(x) \wedge \neg r(x))$
  - A doua afirmatie nu poate fi scrisa drept $\exists x(p(x) \rightarrow \neg r(x))$ fiindca $p(x) \rightarrow \neg r(x)$ e adevarata ori de cate ori x nu e un leu.
  - Asadar aceasta ar fi adevarata daca exista cel putin o creatura care nu e leu, chiar daca toti leii beau cafea.

Traducerea din limbajul natural prin exemple

- **Ex6:** Traduceti “Mihai este un chirurg talentat si un jucator de tenis. In concluzie, Mihai este un chirurg si un jucator de tenis talentat.” Domeniul e reprezentat de toti oamenii.
- Fie r(x) “x este un chirurg”, k(x) “x este talentat” si t(x) “x este un jucator de tenis”.
- Traducerea devine:

$$\frac{(r(mihai) \land k(mihai)) \land t(mihai)}{t(mihai) \land k(mihai)}$$

Traducerea din limbajul natural prin exemple

- Traducerea preia un argument gresit din limbajul natural si il traduce ca fiind valid in logica predicatelor.
- Problema apare din diferenta de a fi talentat ca si chirurg si a fi talentat ca jucator de tenis.
- De aceea, vom lua doua predicate diferite pentru cele doua: $k_1(x)$ “x e talentat ca si chirurg” si $k_2(x)$ “x e talentat ca jucator de tenis.”

$$\frac{(r(Mihai) \wedge k_1(Mihai)) \wedge t(Mihai)}{t(Mihai) \wedge k_2(Mihai)}$$

Cuantificatori multipli

- Fie urmatoarele notatii:
  - Domeniul: oameni si caini.
  - d(x) “x este un caine”.
  - f(x, y) “x este un prieten al lui y”.
  - o(x, y) “x este stapanul lui y”.
- Sa traducem urmatoarele afirmatii:
  - Labus e un caine.
  - *d(labus).*
  - Mihai este un stapan de caine.
  - *Se poate reformula drept “Exista un caine pentru care Mihai este stapan”.*
  - $\exists x(d(x) \wedge o(mihai, x))$.

d(x) “x este un caine”.
f(x, y) “x este un prieten al lui y”.
o(x, y) “x este stapanul lui y”.

- Continuare:
  - Cineva este un stapan de caine.
  - *Se poate reformula drept “Exista un y astfel incat y este un stapan de caine” , iar interpretarea lui “stapan de caine” rezulta din afirmatia anterioara:*
  - $\exists y \exists x(d(x) \wedge o(y, x))$.

  - Toti prietenii lui Mihai sunt stapani de caine.
  - *Se poate reformula drept “Fiecare prieten al lui Mihai este stapan de caine”, iar interpretarea lui “stapan de caine” rezulta din afirmatia anterioara:*
  - $\forall x[f(x, mihai) \rightarrow \exists z(d(z) \wedge o(x, z))]$.

d(x) “x este un caine”.
f(x, y) “x este un prieten al lui y”.
o(x, y) “x este stapanul lui y”.

- Continuare:
  - Fiecare stapan de caine este un prieten al unui stapan de caine.
  - Putem reformula drept “Pentru fiecare x care este un stapan de caine, exista un stapan de caine care este prietenul lui x”.
  - $\forall x[\exists z(d(z) \wedge o(x, z)) \rightarrow \exists y(\exists z(d(z) \wedge o(y, z) \wedge f(x, y))]$.

Cuantificatori multipli

- Fie urmatoarele notatii:
  - Domeniul: oameni.
  - $p(x, y)$ “Lui x ii place de y”.
- Sa traducem urmatoarele afirmatii:
  - Lui Mihai ii place de oricine de care ii place lui Dan.
  - $\forall x(p(dan, x) \rightarrow p(mihai, x))$
  - Exista cineva caruia ii place oricine caruia ii place oricine de care ii place lui.
  - $\exists x$ astfel incat oricui ii place de oricine de care ii place lui x este placut de x.
  - $\exists x \forall y$(y place pe oricine de care ii place lui x $\rightarrow$ lui x ii place de y)
  - $\exists x \forall y[\forall z(p(x, z) \rightarrow p(y, z)) \rightarrow p(x, y)]$

Programarea logica

- Limbajul Prolog este un limbaj care a fost creat pentru a rationa cu logica predicatelor.

- Un program Prolog e format din fapte si reguli.
- Faptele Prolog definesc predicatele specificand elementele care satisfac aceste predicate.
- Regulile Prolog sunt folosite pentru a defini noi predicate, utilizandu-le pe cele deja definite de faptele Prolog.

Exercitii

1. Fie P(x) afirmatia „cuvantul x contine litera a”. Ce valori de adevar obtinem in cazurile de mai jos:

– P(portocala)

– P(ananas)

– P(rosie)

– P(fals)

Exercitii

2. Care este valoarea lui x dupa ce este executata asertiunea **if** P(x) **then** x:=1, unde P(x) exprima faptul ca „x > 1" si valoarea lui x cand se ajunge la aplicarea conditionalului este:

– x = 0

– x = 1

– x = 2

Exercitii

3\. Fie P(x) afirmatia „x petrece mai mult de 5 ore in fiecare zi in fata calculatorului", unde domeniul pentru x consta din toti studentii. Exprimati fiecare din urmatoarele cuantificari in limbaj natural:

– $\exists x\, P(x)$

– $\forall x\, P(x)$

– $\exists x\, \neg P(x)$

– $\forall x\, \neg P(x)$

Exercitii

4. Traduceti urmatoarele asertiuni in limbaj natural, unde C(x) codifica „x este un comic" iar F(x) „x este amuzant", iar domeniul pentru x este format din toti oamenii.

- $\forall x\,(C(x) \rightarrow F(x))$
- $\forall x\,(C(x) \wedge F(x))$
- $\exists x\,(C(x) \rightarrow F(x))$
- $\exists x\,(C(x) \wedge F(x))$

Exercitii

5. Fie P(x) afirmatia „x poate vorbi engleza” si Q(x) „x stie Java”. Exprimati fiecare dintre urmatoarele propozitii folosind P(x), Q(x), cuantificatori si conective logice. Domeniul cuantificatorilor consta din toti studentii din an.

– Exista un student din an care stie engleza si stie Java.

– Exista un student din an care stie engleza dar nu stie Java.

– Fiecare student din an fie stie engleza fie stie Java.

– Niciun student din an nu stie engleza sau Java.

Exercitii

6. Fie P(x) afirmatia „x = x^2”. Daca domeniul consta din numere intregi, care sunt valorile de adevar pentru:

– P(0)

– P(1)

– P(2)

– P(-1)

– ∃x P(x)

– ∀x P(x)

Exercitii

7. Determinati valorile de adevar pentru fiecare din afirmatiile de mai jos, daca domeniul este multimea numerelor intregi:

- $\forall n\ (n + 1 > n)$
- $\exists n\ (2n = 3n)$
- $\exists n\ (n = -n)$
- $\forall n\ (n\text{^}2 >= n)$

Exercitii

8. Sa presupunem ca domeniul functiei propozitionale $P(x)$ consta din intregii 1, 2, 3, 4, 5. Scrieti fiecare dintre urmatoarele propozitii fara a intrebuinta cuantificatori, in schimb folosind doar disjunctii, conjunctii si negatii.

- $\exists x\, P(x)$
- $\forall x\, P(x)$
- $\exists x\, \neg P(x)$
- $\forall x\, \neg P(x)$
- $\neg\, \exists x\, P(x)$
- $\neg\, \forall x\, P(x)$
- $\forall x\, ((x <> 3) \rightarrow P(x)) \vee \exists x\, \neg P(x)$

Exercitii

9. Pentru fiecare din urmatoarele afirmatii gasiti un domeniu pentru care este adevarata si unul pentru care este falsa:

– Toti studiaza informatica.
– Toti au peste 18 ani.
– Oricare doi oameni au aceeasi mama.
– Nu exista doi oameni diferiti cu aceeasi bunica.

Exercitii

10. Traduceti in doua moduri urmatoarele afirmatii folosind predicate, cuantificatori si conective logice. Mai intai, domeniul consta din toti studentii din anul I iar mai apoi consta din toti oamenii. In plus, folositi si un predicat cu doua variabile.

– Cineva din anul I vorbeste engleza.
– Toti din anul I sunt prietenosi.

Exercitii

– Exista o persoana din anul I care nu s-a nascut in Craiova.

– O persoana din anul I practica un inotul.

– Nicio persoana din anul I nu a mai facut un curs de logica computationala.

Exercitii

11. Exprimati fiecare din urmatoarele afirmatii utilizand cuantificatori. Apoi formulati negatia afirmatiei a.i. nicio negatie sa nu se afle in stanga unui cuantificator. Apoi exprimati negatia in limbaj natural.

– Unii caini batrani pot invata lucruri noi.
– Niciun iepure nu stie informatica.

Exercitii

– Orice pasare poate sa zboare.

– Nu exista niciun caine care sa poata vorbi.

– Nu exista niciun student din anul I care sa stie engleza si germana.

Exercitii

12. Gasiti un contraexemplu, daca este posibil, pentru urmatoarele afirmatii cuantificate universal, unde domeniul pentru toate variabilele consta din toate numerele intregi.

- $\forall x(x\text{^}2 >= x)$
- $\forall x(x > 0 \vee x < 0)$
- $\forall x(x = 1)$

Exercitii

13. Traduceti urmatoarele afirmatii in limbaj natural, unde F(p) inseamna “Imprimanta p este stricata”, B(p) “Imprimanta p este ocupata”, L(j) “Jobul j este pierdut” si Q(j) “Jobul j este in coada”:

– $\exists x(F(x) \wedge B(x)) \rightarrow \exists y L(y)$

– $\forall x(B(x) \rightarrow \exists y Q(y))$

– $\exists y(Q(y) \wedge L(y)) \rightarrow \exists x F(x)$

–$(\forall x B(x) \wedge \forall y Q(y)) \rightarrow \exists y L(y)$

Exercitii

14. Aratati ca $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ si $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ nu sunt logic echivalente.

Exercitii

15. Fie P(x), Q(x), R(x) si S(x) urmatoarele afirmatii “x este un bebelus”, “x e logic”, “x se poate descurca cu un crocodil” si “x e dispretuit”. Presupuneti ca domeniul consta din toti oamenii. Exprimati fiecare din urmatoarele asertiuni folosind cuantificatori, conective logice si P(x), Q(x), R(x) si S(x):

– Bebelusii sunt ilogici.

– Nimeni care se poate descurca cu un crocodil nu e dispretuit.

Exercitii

– Persoanele ilogice sunt dispretuite.

– Bebelusii nu pot sa se descurce cu un crocodil.

Rezulta ultima afirmatie din primele trei? Daca nu, care e concluzia corecta?