Demonstratii. Deductia naturala

Scurta recapitulare

- O ***evaluare booleana*** este o functie *v* al carei domeniu este multimea tuturor formulelor din logica propozitiilor, iar codomeniul este multimea de valori de adevar {A, F} a.i.
  - $v(p)$ este definit pentru orice formula atomica p.
  - Pentru orice formula α,
    - $v(\neg\alpha)$ = A, daca $v(\alpha)$ = F
    - $v(\neg\alpha)$ = F, daca $v(\alpha)$ = A ...
- Dintr-o multime de formule Σ spunem ca se ***deduce*** o formula φ, (sau φ este ***consecinta logica*** pentru Σ), notat

  $\Sigma \models \varphi$, daca fiecare evaluare booleana v care satisface Σ il satisface si pe φ.

Scurta recapitulare

- Fie formulele $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Formula P este consecinta logica a multimii $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ daca si numai daca $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge \neg P$ este nesatisfiabila.
- Propozitiile compuse p si q se numesc ***echivalente logic*** daca si numai daca $p \leftrightarrow q$ este o tautologie. Notatie: $p \equiv q$.
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- Cand este nevoie sa construim tabele complete de adevar si cand nu.

Folosirea echivalentelor logice

- **Ex1**: Sa se arate ca $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ este o tautologie.

- $(p \wedge q) \to (p \vee q) \equiv (\neg(p \wedge q)) \vee (p \vee q)$
  $\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$
  $\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$
  $\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$
  $\equiv$ A $\vee$ A
  $\equiv$ A

Folosirea echivalentelor logice

- **Ex2**: Aratati ca $p \leftrightarrow q$ si $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ sunt echivalente.
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
  $\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
  // not $(\neg p \vee q)$ cu X, deci vom avea X $\wedge (\neg q \vee p)$
  // adica $(X \wedge \neg q) \vee (X \wedge p)$
  $\equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p)$
  $\equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)) \vee ((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q))$
  //$(\neg q \wedge q) \equiv$ F, la fel $(p \wedge \neg p)$
  $\equiv (\neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$

Exercitii

- **Exc1**: Sa se arate prin tabele de adevar ca urmatoarele formule propozitionale sunt tautologii:
  1. $\neg p \to (p \to q)$
  2. $(p \wedge q) \to p$
  3. $(\neg p \wedge (p \vee q)) \to q$
  4. $(p \wedge (p \to q)) \to q$
  5. $(\neg p \wedge (p \to q)) \to \neg q$
- **Exc2**: Sa se arate fara sa se foloseasca tabele de adevar ca formulele de la exercitiul 6 sunt tautologii.

Exercitii

- **Exc3**: Verificati prin tabele de adevar daca urmatoarele formule sunt echivalente:
  1. $(p \wedge q) \rightarrow r$, $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
  2. $\neg (p \leftrightarrow q)$, $p \leftrightarrow \neg q$
  3. $\neg (p \oplus q)$, $p \leftrightarrow q$
  4. $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$, $q \rightarrow (p \vee r)$
  5. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$, $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- **Exc4**: Verificati fara tabele de adevar daca formulele de la exercitiul 3 sunt echivalente.
  - Pentru punctul 3 al exc 3 este necesara si cunoasterea echivalentei:

$$p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

Un numar minim de conective

- Ce s-ar intampla daca
  - din logica propozitiilor eliminam echivalenta ($\leftrightarrow$) si o inlocuim cu varianta ei echivalenta: $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$?
  - s-ar obtine un limbaj echivalent logic cu logica propozitiilor.
- Simplificarea poate merge si mai departe, a.i. orice propozitie compusa poate fi scrisa folosind numai negatia, o alta conectiva logica si paranteze.

Un numar minim de conective

- **Exc5**: Utilizand numai negatia, implicatia si paranteze scrieti propozitii care sunt logic echivalente cu cele de mai jos:
  1. $p \vee q$
  2. $p \wedge q$
  3. $p \leftrightarrow q$
- **Exc6**: Utilizand numai negatia, disjunctia si paranteze scrieti propozitii care sunt logic echivalente cu cele de mai jos:
  1. $p \wedge q$
  2. $p \rightarrow q$
  3. $p \leftrightarrow q$
  4. $\neg p \wedge \neg q$

Demonstratii – silogism disjunctiv

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline q \end{array}$$

- p = "Afara ploua"
- q = "Afara este insorit"
- Stim ca:
  - $p \vee q$ = "Afara ploua sau este insorit."
  - $\neg p$ = "Afara nu ploua."
- Rezulta:
  - q = "Afara este insorit."

Demonstratii – modus ponens

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

- p = "Ai o parola."
- q = "Te poti loga la calculator."
- Stim ca
  - $p \rightarrow q$ = "Daca ai o parola, atunci te poti loga la calculator."
  - p = "Ai o parola."
- Rezulta
  - q = "Te poti loga la calculator."

Demonstratii

- Forme precum silogismul disjunctiv sau modus ponens pot fi combinate pentru a crea demonstratii mai complicate:

$$\begin{array}{c} \neg P \rightarrow (Q \vee P) \\ \neg P \\ \hline Q \end{array}$$

- Din modus ponens, pornind de la ceea ce stim, obtinem $Q \vee P$, o concluzie intermediara.
- Din $Q \vee P$, si $\neg P$, prin silogism disjunctiv se obtine Q.

Demonstratii

- D.p.d.v. formal, o demonstratie este o secventa de propozitii.
  - Primele propozitii din secventa se numesc ***premise***.
  - Fiecare propozitie ulterioara se deduce din cele anterioare printr-o regula de demonstratie.
  - Ultima propozitie din secventa (cea de sub linie) reprezinta ***concluzia***.

Deductia naturala

- Intr-un sistem de deductie naturala, avem 2 reguli pentru fiecare operator logic:
  - O regula de ***introducere*** (notata cu I) care ne permite sa demonstram o propozitie care are operatorul ca si conectiva principala.
  - O regula de ***eliminare*** (notata cu E) care ne permite sa demonstram ceva cand se da o propozitie care are operatorul ca si conectiva principala.
- In plus, avem si regula de ***reiterare*** (notata cu R) .
  - Daca ceva a fost deja demonstrat , reiterarea permite reluarea acelei reguli intr-o line noua.

Reiterarea

$$\begin{array}{r|ll} m & P & \\ n & P & \mathrm{R}\; m \end{array}$$

- Cand adaugam o linie la o demonstratie, specificam:
  - Ce regula (R, I sau E) justifica linia.
  - Numerele liniilor la care s-a aplicat regula.
- R1 in exemplul de mai sus arata ca linia *n* este justificata prin reiterare aplicata liniei *m*.
- Reiterarea nu demonstreaza nimic nou, doar aminteste o propozitie de mai sus (de obicei, mai multe linii mai sus).

Conjunctia – introducerea ($\wedge$I)

- De ce ar fi nevoie pentru a demonstra $P \wedge Q$?
  - Ar trebui sa demonstram separat ca *P* este adevarat, la fel, *Q*.

$$\begin{array}{r|ll} m & P & \\ n & Q & \\ & P \wedge Q & \wedge\mathrm{I}\; m,n \end{array}$$

- $\wedge$I *m*,*n* inseamna ca introducerea conjunctiei se aplica pentru liniile *m* si *n*.
  - Liniile pot fi orice linii existente intr-o demonstatie, nu neaparat consecutive, lucru valabil pentru toate celelalte reguli.
- Evident, *P* si *Q* pot fi propozitii complexe (din acest motiv le-am notat cu litere mari).

Conjunctia – eliminarea ($\wedge$E)

- Ce se poate deduce din o propozitie precum $P \wedge Q$?
  - Se poate deduce *P*. La fel, se poate deduce *Q*.

$$\begin{array}{r|ll} m & P \wedge Q & \\ & P & \wedge\mathrm{E}\; m \\ & Q & \wedge\mathrm{E}\; m \end{array}$$

- Cand avem o conjunctie pe o linie, se poate utiliza $\wedge$ E pentru a deriva oricare din propozitiile implicate in conjunctie.
- $\wedge$ E necesita o singura propozitie, deci scriem un singur numar de linie ca justificare pentru aplicarea acestei reguli.

Conjunctia

- **Ex3**: Aratati ca:

$$\frac{[(p \wedge q) \to (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]}{[(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] \wedge [(p \wedge q) \to (r \vee s)]}$$

- Incepem prin a scrie premisa pe prima linie si a trage o linie sub ea.
  - Tot ce apare sub aceasta linie este justificat de o regula a demonstratiei.

$$\begin{array}{r|l} 1 & [(p \wedge q) \to (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] \\ \hline \end{array}$$

Conjunctia

- **Ex3** (cont): Aratati ca:

$$\frac{[(p \wedge q) \to (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]}{[(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] \wedge [(p \wedge q) \to (r \vee s)]}$$

- Din premisa, putem deduce oricare din cele doua propozitii complexe, prin eliminarea conjunctiei.

$$\begin{array}{l|cl} 1 & [(p \wedge q) \to (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] & \\ \hline 2 & [(p \wedge q) \to (r \vee s)] & \wedge \text{E } 1 \\ 3 & [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] & \wedge \text{E } 1 \end{array}$$

Conjunctia

- **Ex3** (cont): Aratati ca:

$$\frac{[(p \wedge q) \to (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]}{[(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] \wedge [(p \wedge q) \to (r \vee s)]}$$

- $\wedge$I necesita ca fiecare din elementele care vor fi adaugate la conjunctie sa fie disponibile in demonstratie.
  - Ele nu trebuie sa fie neaparat in ordine.

$$\begin{array}{l|cl} 1 & [(p \wedge q) \to (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] & \\ \hline 2 & [(p \wedge q) \to (r \vee s)] & \wedge \text{E } 1 \\ 3 & [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] & \wedge \text{E } 1 \end{array}$$

Conjunctia

- **Ex3** (cont): Aratati ca:

$$\frac{[(p \wedge q) \to (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]}{[(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] \wedge [(p \wedge q) \to (r \vee s)]}$$

- $\wedge$I necesita ca fiecare din elementele care vor fi adaugate la conjunctie sa fie disponibile in demonstratie.
  - Ele nu trebuie sa fie neaparat in ordine.

$$\begin{array}{l|cl} 1 & [(p \wedge q) \to (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] & \\ \hline 2 & [(p \wedge q) \to (r \vee s)] & \wedge \text{E } 1 \\ 3 & [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] & \wedge \text{E } 1 \\ 4 & [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] \wedge [(p \wedge q) \to (r \vee s)] & \wedge \text{I } 3{,}2 \end{array}$$

De observat ordinea liniilor

Disjunctia – introducerea ($\vee$ I)

- Daca propozitia p este adevarata, atunci si $p \vee q$ este adevarata.
  - Deci, daca avem o propozitie P adevarata, putem introduce o disjunctie in care sa apara si P.

$$\begin{array}{l|ll} m & P & \\ & P \vee Q & \vee \text{I } m \\ & Q \vee P & \vee \text{I } m \end{array}$$

- Q poate fi orice alta propozitie, simpla sau complexa.
  - Asadar, o demonstratie corecta este si cea de mai jos.

$$\begin{array}{l|cl} 1 & p & \\ \hline 2 & p \vee [(r \to q) \leftrightarrow (r \vee s)] & \vee \text{I } 1 \end{array}$$

Disjunctia – introducerea ($\vee$ I)

- Stiindu-se P adevarat, se poate introduce disjunctia cu Q.
  - Aceasta se poate interpreta ca: daca P este adevarat, atunci si $P \vee Q$ este adevarat, indiferent ce valoarea de adevar a lui Q.
  - Deci concluzia nu poate fi falsa daca premisa este adevarata, deci demonstratia este corecta.

Disjunctia – eliminarea ($\vee$ E)

- Ce se poate concluziona daca se stie ca $P \vee Q$ este adevarata?
  - Nu se poate spune ca P este adevarata.
    - Nu stim daca P face $P \vee Q$ adevarata sau Q o face adevarata.
  - Analog, nu se poate concluziona nimic despre Q.
- Nu se poate trage nicio concluzie doar din premisa $P \vee Q$.
- Daca stim insa si ca P este falsa, atunci putem concluziona ca este adevarata Q.
  - Am ajuns la ***silogismul disjunctiv***.

$$\begin{array}{l|ll} m & P \vee Q & \\ n & \neg P & \\ & Q & \vee \text{E } m, n \end{array} \qquad \begin{array}{l|ll} m & P \vee Q & \\ n & \neg Q & \\ & P & \vee \text{E } m, n \end{array}$$

Implicatia – introducerea ($\rightarrow$ I)

$$\frac{P \vee Q}{\neg P \rightarrow Q}$$

- Se observa ca cele doua sunt logic echivalente.
- Scriem demonstratia incepand cu premisa, dupa care tragem o linie orizontala.

1	$P \vee Q$	

- Daca am fi stiut ca $\neg P$ este adevarat, am fi putut concluziona Q prin $\vee$ E.
  - Dar nu stim acest fapt...

Implicatia – introducerea ($\rightarrow$ I)

- Putem incepe o ***subdemonstratie*** (subdem), adica o demonstratie in cadrul demonstratiei principale.
  - Se mai trage o linie verticala pentru a indica faptul ca nu ne mai aflam in cadrul demonstratiei principale.
  - Apoi scriem in cadrul subdem o presupunere.
  - In cazul nostru, ar fi util sa presupunem $\neg P$.

1	$P \vee Q$		
2		$\neg P$	

Implicatia – introducerea ($\rightarrow$ I)

- Este important sa mentionam ca nu pretindem ca $\neg P$ este demonstrat.
  - Nu este nevoie insa sa demonstram nicio presupunere din subdem.
  - Poate fi interpretata ca: ce s-ar putea demonstra daca $\neg P$ ar fi adevarat?
    - Se poate demonstra Q.

1	$P \vee Q$		
2		$\neg P$	
3		Q	$\vee$ E 1,2

Implicatia – introducerea ($\rightarrow$ I)

- Am demonstrat asadar ca daca avem premisa $\neg P$, putem demonstra Q.
  - Altfel spus, am demonstrat ca $\neg P \rightarrow Q$.
- Prin urmare, putem iesi din subdem cu concluzia $\neg P \rightarrow Q$.
- Notatia de la introducerea implicatiei cuprinde toate liniile din subdem, care desigur pot fi mai multe de doua.

1	$P \vee Q$		
2		$\neg P$	
3		Q	$\vee$ E 1,2
4	$\neg P \rightarrow Q$		$\rightarrow$ I 2-3

Implicatia – introducerea ($\rightarrow$ I)

- Din faptul ca putem presupune absolut orice, poate parea ca se merge spre haos.
  - Totusi, presupunerile se leaga de afirmatiile adevarate din afara demonstratiei.
- O subdem se incheie atunci cand se incheie linia verticala.
- Pentru a se termina o demonstratie, trebuie incheiate toate subdem.
- Cand inchidem o subdem, nu ne mai putem referi inapoi la afirmatii din liniile din subdem (care contin presupuneri).

Implicatia – introducerea ($\rightarrow$ I)

- Cand introducem o subdem, incepem cu ceea ce vrem sa deducem in coloana.
- Asadar, pentru a obtine o implicatie prin $\rightarrow$ I, incepem presupunerea cu antecedentul implicatiei pe care vrem sa o realizam.
- Ultima linie a subdem va contine elementul din dreapta implicatiei.

m		P	
n		Q	
	$P \rightarrow Q$		$\rightarrow$ I *m-n*

Implicatia – eliminarea ($\rightarrow$ E)

- Nu obtinem nimic doar dintr-o implicatie $P \rightarrow Q$.
  - Daca am sti insa si P, am putea concluziona Q.
- $\rightarrow$ E se mai numeste si ***modus ponens***.

m	$P \rightarrow Q$	
n	P	
	Q	$\rightarrow$ E m, n

Implicatia

- **Ex4**: Aratati ca:

$$\frac{P \rightarrow Q \qquad Q \rightarrow R}{P \rightarrow R}$$

- Devreme ce concluzia contine o implicatie, va trebui sa se utilizeze regula $\rightarrow$ I.
  - Pentru aceasta, avem nevoie de o subdem care sa inceapa cu P.

Implicatia

1	$P \rightarrow Q$	
2	$Q \rightarrow R$	
3		P

- Presupunand P adevarat, avem posibilitatea sa utilizam $\rightarrow$ E asupra primei premise.
  - Aceasta ne permite sa-l determinam pe Q.
  - $\rightarrow$ E aplicat premisei 2 ne conduce la R.
  - Din presupunerea lui P am ajuns sa demonstram R si aplicam $\rightarrow$ I.

Implicatia

1	$P \rightarrow Q$		
2	$Q \rightarrow R$		
3		P	
4		Q	$\rightarrow$ E 1, 3
5		R	$\rightarrow$ E 2, 4
6	$P \rightarrow R$		$\rightarrow$ I 3-5

- Presupunand P adevarat, avem posibilitatea sa utilizam $\rightarrow$ E asupra primei premise.
  - Aceasta ne permite sa-l determinam pe Q.
  - $\rightarrow$ E aplicat premisei 2 ne conduce la R.
  - Din presupunerea lui P am ajuns sa demonstram R si aplicam $\rightarrow$ I.

Echivalenta – introducerea ($\leftrightarrow$ I)

- Pentru a demonstra ca $P \leftrightarrow Q$, trebuie sa aratam ca presupunand P obtinem Q si viceversa.
  - Deci trebuie sa aratam ca $P \rightarrow Q$ si $Q \rightarrow P$.
  - Prin urmare, trebuie sa avem doua subdem, una in care presupunem P si obtinem Q si una in care presupunem Q si obtinem P.

m		P	
n		Q	
	…	…	
p		Q	
q		P	
	$P \leftrightarrow Q$		$\leftrightarrow$ I m-n, p-q

Echivalenta – eliminarea ($\leftrightarrow$ E)

- Daca stim $P \leftrightarrow Q$ si de asemenea stim P, atunci putem concluziona Q.
  - Analog, stiind $P \leftrightarrow Q$ si Q putem concluziona P.

m	$P \leftrightarrow Q$	
n	P	
	Q	$\leftrightarrow$ E m, n

m	$P \leftrightarrow Q$	
n	Q	
	P	$\leftrightarrow$ E m, n

Negatia – introducerea ($\neg$ I)

- Se face prin reducere la absurd.
- Se face in cadrul unei subdem o presupunere si, daca se ajunge la o contradictie, am demonstrat negatia presupunerii initiale.

m	P	RA
n	Q	
$n+1$	$\neg Q$	
$n+2$	$\neg P$	$\neg$ I m-n + 1

Reducere la absurd.

De la m pana la n + 1.

Negatia – introducerea ($\neg$ I)

- Ultimele doua propozitii ale subdem trebuie sa fie o contradictie clara, adica o propozitie urmata de negatia ei.
- **Ex5**: Aratati ca $\neg (P \wedge \neg P)$ este o tautologie.
  - Demonstratia se poate face incepand cu o subdem prin presupunerea ca $P \wedge \neg P$.

1	$P \wedge \neg P$	RA
2	P	$\wedge$ E 1
3	$\neg P$	$\wedge$ E 1
4	$\neg (P \wedge \neg P)$	$\neg$ I 1-3

Negatia – eliminarea ($\neg$ E)

- Se presupune o afirmatie negata si daca se ajunge la o contradictie, afirmatia fara negatie este considerata adevarata.

m	$\neg P$	RA
n	Q	
$n+1$	$\neg Q$	
$n+2$	P	$\neg$ E m-n + 1

Negatia

- **Ex6**: Demonstrati ca:

$$\begin{array}{c} P \vee Q \\ P \rightarrow R \\ Q \rightarrow R \\ \hline R \end{array}$$

1	$P \vee Q$	
2	$P \rightarrow R$	
3	$Q \rightarrow R$	
4	$\neg R$	RA
5	P	RA
6	R	$\rightarrow$ E 2, 5
7	$\neg R$	R 4
8	$\neg P$	$\neg$ I 5-7
9	Q	RA
10	R	$\rightarrow$ E 3, 9
11	$\neg R$	R 4
12	$\neg Q$	$\neg$ I 9-11
13	Q	$\vee$ E 1, 8
14	R	

Reguli de inlocuire

- Avem o serie de reguli care sunt permise in cadrul unor propozitii complexe.
- Comutativitatea (notata in cadrul demonstratiilor ***com***)
  - $P \wedge Q \equiv P \wedge Q$
  - $P \vee Q \equiv Q \vee P$
  - $P \leftrightarrow Q \equiv Q \leftrightarrow P$
- Dubla negatie (***DN***)
  - $\neg \neg P \equiv P$
- Legile lui De Morgan (***DeM***)
  - $\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
  - $\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

Reguli de inlocuire

- Implicatia (***Impl***)
  - $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
  - $P \vee Q \equiv \neg P \rightarrow Q$
- Echivalenta (***Echiv***)
  - $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Reguli de inlocuire

- **Ex7**: Aratati ca:

$$\frac{\neg (P \to Q)}{P \wedge \neg Q}$$

1	$\neg (P \to Q)$	
2	$\neg (\neg P \vee Q)$	Impl 1
3	$\neg\neg P \wedge \neg Q$	DeM 2
4	$P \wedge \neg Q$	DN 3

Exercitii

- **Exc7**: Adaugati justificarile (regula aplicata si numerele de linii) pentru fiecare linie a demonstratiilor urmatoare.

1	$T \to \neg Q$
2	$P \wedge T$
3	$Q \vee (R \wedge S)$
4	T
5	$\neg Q$
6	$R \wedge S$
7	S

1	$P \leftrightarrow \neg Q$	
2	$P \vee \neg Q$	
3		$\neg P$
4		$\neg Q$
5		P
6		$\neg P$
7	P	

Exercitii

- **Exc8**: Demonstrati ca:

$$\frac{P \wedge Q}{P \leftrightarrow Q} \qquad \frac{P \to (Q \to R)}{(P \wedge Q) \to R} \qquad \frac{P \to (P \wedge \neg P)}{\neg P}$$

$$\frac{P \to \neg P}{\neg P} \qquad \frac{(P \wedge Q) \vee R}{R \vee Q} \qquad \frac{P \vee (Q \to P)}{\neg P \to \neg Q}$$

$$\frac{\begin{array}{c} P \wedge (Q \vee R) \\ P \to \neg R \end{array}}{Q} \qquad \frac{\begin{array}{c} \neg P \to Q \\ P \to R \end{array}}{Q \vee R} \qquad \frac{\begin{array}{c} P \leftrightarrow Q \\ Q \leftrightarrow R \end{array}}{P \leftrightarrow R}$$

Exercitii

- **Exc9 tema**: Demonstrati ca:

$$\frac{\begin{array}{c} (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ \neg (P \wedge S) \\ S \vee T \end{array}}{T}$$

- **Exc10**: Demonstrati ca urmatoarele propozitii sunt tautologii:
  - $P \to P$
  - $P \vee \neg P$
  - $\neg (P \to \neg Q) \to (P \to Q)$

Exercitii

- **Exc11**: Aratati ca urmatoarele perechi de propozitii sunt demonstrabil echivalente:
  - $\neg\neg\neg\neg P, P$
  - $P \to Q, \neg Q \to \neg P$
  - $\neg P \leftrightarrow Q, \neg (P \leftrightarrow Q)$
- **Exc12**: Demonstrati ca:
  - $P \wedge (\neg Q \to \neg P) \models (P \wedge Q) \vee \neg P$
  - $\{P \to (Q \wedge R), (\neg P \to R)\} \models \{ R \}$