Echivalente propozitionale

Scurta recapitulare

- O propozitie este ***valida*** (sau tautologie) iff este adevarata in toate interpretarile posibile.
- O propozitie este ***satisfiabila*** iff exista cel putin o interpretare in care este adevarata.
- O propozitie este ***nesatisfiabila*** (sau contradictie) iff este falsa in toate interpretarile.
- O propozitie este ***contingenta*** iff exista cel putin o interpretare in care este adevarata si una in care este falsa.
- O multime de propozitii este ***consistenta*** daca exista cel putin o linie dintr-o tabela de adevar in care toate propozitiile sunt concomitent adevarate.

Tema de data trecuta? 0.5 puncte Termen limita 17 martie

- Faceti un program in limbajul dorit (C, Java, Prolog etc.) pentru a calcula AND, OR si XOR pentru doua siruri date de biti (ca in exemplul de mai jos).

1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	OR
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	AND
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	XOR

Consistenta

- **Exc1**: Determinati daca fiecare set de propozitii este consistent sau inconsistent:
  1. $p \to \neg p, \neg p \to \neg p, p \wedge p, p \vee p$
  2. $p \vee q, p \to r, q \to r$
  3. $p \vee q, q \vee r, r \to \neg p$
  4. $p \to (q \vee r), r \to \neg p, p \to \neg q$

Evaluarea definita formal

- **Def1**: O ***evaluare booleana*** este o functie *v* al carei domeniu este multimea tuturor formulelor din logica propozitiilor, iar codomeniul este multimea de valori de adevar {A, F} a.i.
  - v(*p*) este definit pentru orice formula atomica *p*.
  - Pentru orice formula α,
    - $v(\neg \alpha)$ = A, daca $v(\alpha)$ = F
    - $v(\neg \alpha)$ = F, daca $v(\alpha)$ = A
  - Pentru orice formule α si β,
    - $v(\alpha \wedge \beta)$ = A daca $v(\alpha)$ = A si $v(\beta)$ = A
    - $v(\alpha \wedge \beta)$ = F, altfel
  - Pentru orice formule α si β,
    - $v(\alpha \vee \beta)$ = F daca $v(\alpha)$ = F si $v(\beta)$ = F
    - $v(\alpha \vee \beta)$ = A, altfel

Evaluarea definita formal

- **Def1** cont
  - Pentru orice formule α si β,
    - $v(\alpha \oplus \beta)$ = F daca $v(\alpha) = v(\beta)$
    - $v(\alpha \oplus \beta)$ = A, altfel
  - Pentru orice formule α si β,
    - $v(\alpha \to \beta)$ = F daca $v(\alpha)$ = A si $v(\beta)$ = F
    - $v(\alpha \to \beta)$ = A, altfel
  - Pentru orice formule α si β,
    - $v(\alpha \leftrightarrow \beta)$ = A daca $v(\alpha) = v(\beta)$
    - $v(\alpha \leftrightarrow \beta)$ = F, altfel

Evaluari booleene

- Pentru orice doua formule propozitionale α si β avem:
  - $v(\neg \alpha) = \neg v(\alpha)$
  - $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta)$
  - $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \vee v(\beta)$
  - $v(\alpha \oplus \beta) = v(\alpha) \oplus v(\beta)$
  - $v(\alpha \rightarrow \beta) = v(\alpha) \rightarrow v(\beta)$
  - $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = v(\alpha) \leftrightarrow v(\beta)$
- **Ex1**: Stiind ca $v(p)$ = A si $v(q)$ = F, ce valoare de adevar va avea formula $(\neg p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$?
  - Rezolvarea (la tabla) poate fi facuta cu o tabela partiala de adevar sau aplicand direct (ca mai sus) functia *v* pentru intreaga formula.

Evaluari booleene

- **Exc2**: Daca $v(p) = v(r)$ = A si $v(q)$ = F, atunci calculati $v(\alpha)$, unde α este:
  - $\neg(p \rightarrow q)$
  - $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
  - $p \rightarrow (q \wedge r)$
  - $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
  - $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
  - $\neg (p \rightarrow \neg q)$

Validitatea, (ne)satisfiabilitatea revizitate

- Daca *v* este o evaluare booleana si φ o formula propozitionala, *v* ***satisface*** φ daca $v(\varphi)$ = A.
- Daca Σ este o multime de formule propozitionale, *v* ***satisface*** Σ daca daca $v(\varphi)$ = A pentru orice φ din Σ.
- Spunem ca φ (sau Σ) este ***satisfiabila*** daca exista o evaluare booleana care sa o satisfaca.
- O formula φ este ***valida*** sau tautologie daca este satisfacuta de toate evaluarile booleene.
- O formula φ este ***insatisfiabila*** sau contradictie daca nu exista o evaluare booleana care sa o satisfaca.

Deductia

- **Def2**: Dintr-o multime de formule Σ spunem ca se ***deduce*** o formula φ, (sau φ este ***consecinta logica*** pentru Σ), notat $\Sigma \models \varphi$, daca fiecare evaluare booleana *v* care satisface Σ il satisface si pe φ.

- **Ex2**: Aratati ca $\neg q$ este consecinta logica pentru $\{p, p \rightarrow \neg q\}$.
  - $v(p)$ = A si $v(p \rightarrow \neg q)$ = A.
  - Stiind ca $v(p)$ = A, pentru ca $v(p \rightarrow \neg q)$ sa fie adevarata, trebuie ca $v(\neg q)$ = A.
  - Prin urmare, $\{p, p \rightarrow \neg q,\} \models \neg q$

Deductia

- Daca Σ este multime vida, atunci vom nota $\models \varphi$, iar φ in acest caz este o tautologie pentru ca este adevarata pentru orice evaluare booleana posibila.
- **Def3**: Daca Σ si Ω sunt doua multimi de formule propozitionale, spunem ca Ω se deduce din Σ, notat $\Sigma \models \Omega$, daca fiecare evaluare booleana care satisface Σ satisface si Ω.
  - Daca $\Omega \subseteq \Sigma$, fireste ca $\Sigma \models \Omega$.

Deductia

- **Prop1**: Fie formulele $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Formula P este consecinta logica a multimii $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ daca si numai daca $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge \neg P$ este nesatisfiabila.
  - Dem (la tabla) se face prin reducere la absurd.
- **Ex3**: Aratati ca din $\{p \vee q, \neg p\}$ se deduce q.
  - Solutia (la tabla) arata ca $(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$ este nesatisfiabila.
  - Fireste, se poate rezolva si precum exercitiul anterior.

Tabelele de adevar – uneori ineficiente

- Cand numarul de variabile este mare, devin nepractice.
  - De ex, pentru 20 de variabile, avem 2^{20} linii, adica 1 048 576.
  - Desigur, e nevoie de un calculator pentru a verifica o tautologie pentru 20 de variabile.
    - Dar daca avem 1000 de variabile? 2^{1000} linii (un numar cu peste 300 de cifre)?
    - Niciun computer nu poate rezolva tabela de adevar decat in trilioane de ani.

Echivalente logice

- **Def4**:Propozitiile compuse p si q se numesc ***echivalente logic*** daca si numai daca $p \leftrightarrow q$ este o tautologie. Notatie: $p \equiv q$.
- **Prop2**: Propozitiile compuse care sunt ***echivalente logic*** au aceleasi valori de adevar in toate interpretarile.
  - Dem (la tabla) se face prin reducere la absurd.
  - Pe ultima coloana a tabelei de adevar au exact aceleasi valori de adevar.
- Simbolul $\equiv$ nu este o conectiva logica.
- Echivalenta logica se mai noteaza si $\Leftrightarrow$.

Echivalente logice

- Contrapozitiva pentru $A \rightarrow B$ este $\neg B \rightarrow \neg A$, unde A si B sunt propozitii complexe.
  - Care este contrapozitiva pentru $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$?
- **Prop3**: Aratati ca orice formula conditionala este logic echivalenta cu contrapozitiva sa. (dem)

Legile lui De Morgan

$$\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Legile lui De Morgan

- **Ex4**:Folositi legile lui de Morgan pentru a nega:
  - Radu are un celular **si** el are un laptop.
    - p = "Radu are un celular", q = "Radu are un laptop"
    - Avem $p \wedge q$. Negatia $\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$. Asadar, negatia afirmatiei initiale va fi:

      "Radu nu are un celular **sau** el nu are un laptop."
  - Ana va merge la concert sau Mihai va merge la concert.
    - r = "Ana va merge la concert", s = "Mihai va merge la concert"
    - Avem $p \vee q$. Negatia $\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$. Negatia afirmatiei initiale va fi:

      "Ana nu va merge la concert si Mihai nu va merge la concert."

Legile lui De Morgan

- **Exc3**: Folosind legile lui De Morgan, negati urmatoarele propozitii:
  1. Radu este bogat si fericit.
  2. Ana vine pe jos sau ia autobuzul catre Universitate.
  3. Ovidiu se va angaja in industrie sau va preda in invatamant.
  4. Anca stie C si logica computationala.

Echivalente logice

- O metoda de a determina daca doua propozitii compuse sunt echivalente este prin tabela de adevar.
  - Sa aratam ca doua propozitii ***sunt logic echivalente*** necesita o ***tabela*** de adevar ***completa***.
  - Sa aratam ca ***nu sunt logic echivalente*** necesita o tabela de adevar cu ***o singura linie*** in care una din propozitii este A, iar cealalta F.
- **Ex5**:Sa se demonstreze echivalenta:

$$\neg (p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$$

Exercitii

- **Exc4**: Sa se arate ca:
  1. $p \rightarrow q \equiv \neg p \lor q$
  2. $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ (contrapozitiva)
  3. $p \rightarrow q \ != q \rightarrow p$ (reciproca)
  4. $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$
  5. $(p \land q) \rightarrow (p \rightarrow q) \equiv$ T
- **Exc5**: Sa se verifice daca urmatoarele perechi de propozitii sunt logic echivalente:
  1. $p, p \lor p$
  2. $\neg (p \land q), \neg p \lor \neg q$
  3. $p \lor (q \land r), (p \lor q) \land r$

Echivalente logice

- Cu **A** notam o propozitie compusa care este totdeauna adevarata, iar cu **F** una care este falsa.
- Identitate
  - $p \land$ A $\equiv p$
  - $p \lor$ F $\equiv p$
- Dominatie
  - $p \lor$ A $\equiv$ A
  - $p \land$ F $\equiv$ F
- Idempotenta
  - $p \lor p \equiv p$
  - $p \land p \equiv p$
- Dubla negatie
  - $\neg \neg p \equiv p$
- Negatie
  - $p \lor \neg p \equiv$ A
  - $p \land \neg p \equiv$ F
- Comutativitate
  - $p \lor q \equiv q \lor p$
  - $p \land q \equiv q \land p$
- Asociativitate
  - $(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$
  - $(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$

Asociativitatea

- $(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$
- $(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$
  - Din echivalentele de mai sus rezulta ca $p \lor q \lor r$ si $p \land q \land r$ sunt bine definite.
- Prin urmare, legile lui De Morgan pot fi generalizate la
  - $\neg (p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \equiv \neg p_1 \lor \neg p_2 \lor \ldots \lor \neg p_n$
  - $\neg (p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n) \equiv \neg p_1 \land \neg p_2 \land \ldots \land \neg p_n$
- **Ex6**: Calculati **negatia** pentru urmatoarea formula propozitionala (rez la tabla): $(p \lor q \land r)$

Echivalente logice

- Distributivitate (de verificat)
  - $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$
  - $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$
- Absortie (de verificat)
  - $p \lor (p \land q) \equiv p$
  - $p \land (p \lor q) \equiv p$
- Legile lui De Morgan
  - $\neg (p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$
  - $\neg (p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$

Echivalente logice legate de implicatie

- $p \rightarrow q \equiv \neg p \lor q$
- $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
- $p \lor q \equiv \neg p \rightarrow q$
- $p \land q \equiv \neg (p \rightarrow \neg q)$
- $\neg (p \rightarrow \neg q) \equiv p \land \neg q$
- $(p \rightarrow q) \land (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \land r)$
- $(p \rightarrow r) \land (q \rightarrow r) \equiv (p \lor q) \rightarrow r$
- $(p \rightarrow q) \lor (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \lor r)$
- $(p \rightarrow r) \lor (q \rightarrow r) \equiv (p \land q) \rightarrow r$

Echivalente logice legate de conectiva echivalenta

- $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
- $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- $\neg (p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Tabele de adevar – complete sau incomplete, dupa caz

- Indiferent de ce trebuie demonstrat,
  - (ne)validitate,
  - (ne)satisfiabilitate,
  - (ne)contingenta,
  - (in)consistenta, sau
  - (ne)echivalenta a doua formule
- se poate construi o tabela completa de adevar.
- Daca se ajunge pana la completarea tabelei la demonstrarea proprietatii, ne putem opri.

Tabele de adevar: complete sau incomplete?

- In functie de proprietatea de demonstrat, (de ex daca o formula este valida sau nevalida - linia 1 din tabel), avem nevoie sa construim intreaga tabela, sa gasim o linie sau doua linii cu proprietatile de mai jos.

Proprietatea de verificat	Prezenta	Absenta
Validitate	intreaga	o singura linie (F)
Nesatisfiabilitate	intreaga	o singura linie (A)
Contingenta	doua linii – una cu A si una cu F	intreaga
Consistenta	o singura linie (A)	intreaga
Echivalenta	intreaga	o singura linie (F)

Folosirea echivalentelor logice

- Propozitiile compuse (sau parti ale lor) pot fi inlocuite cu alte propozitii compuse cu care sunt logic echivalente fara sa li se schimbe valoarile de adevar.
- **Ex7**: Aratati ca $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
- Se poate face o tabela de adevar sau se pot folosi echivalente.
- $\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q)$
  $\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q$
  $\equiv p \wedge \neg q$

Folosirea echivalentelor logice

- **Ex8**: Aratati ca $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$

- $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$
  $\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q)$
  $\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q)$
  $\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
  $\equiv \mathrm{F} \vee (\neg p \wedge \neg q)$
  $\equiv \neg p \wedge \neg q$

Folosirea echivalentelor logice

- **Ex9**: Sa se arate ca $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ este o tautologie.

- $(p \wedge q) \to (p \vee q) \equiv (\neg (p \wedge q)) \vee (p \vee q)$
  $\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$
  $\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$
  $\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$
  $\equiv \mathrm{A} \vee \mathrm{A}$
  $\equiv \mathrm{A}$

Folosirea echivalentelor logice

- **Ex10**: Aratati ca $p \leftrightarrow q$ si $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ sunt echivalente.
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

  $\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

  // not $(\neg p \vee q)$ cu X, deci vom avea X $\wedge (\neg q \vee p)$

  // adica (X $\wedge \neg q) \vee$ (X $\wedge p$)

  $\equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p)$

  $\equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)) \vee ((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q))$

  //$(\neg q \wedge q) \equiv$ F, la fel $(p \wedge \neg p)$

  $\equiv (\neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$

Exercitii

- **Exc6**: Sa se arate prin tabele de adevar ca urmatoarele formule propozitionale sunt tautologii:
  1. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
  2. $(p \wedge q) \rightarrow p$
  3. $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$
  4. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
  5. $(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg q$
- **Exc7**: Sa se arate fara sa se foloseasca tabele de adevar ca formulele de la exercitiul 6 sunt tautologii.

Exercitii

- **Exc8**: Verificati prin tabele de adevar daca urmatoarele formule sunt echivalente:
  1. $(p \wedge q) \rightarrow r$, $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
  2. $\neg (p \leftrightarrow q)$, $p \leftrightarrow \neg q$
  3. $\neg (p \oplus q)$, $p \leftrightarrow q$
  4. $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$, $q \rightarrow (p \vee r)$
  5. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$, $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- **Exc9**: Verificati fara tabele de adevar daca formulele de la exercitiul 8 sunt echivalente.
  - Pentru punctul 3 al exc 8 este necesara si cunoasterea echivalentei:

$$p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

Un numar minim de conective

- Ce s-ar intampla daca
  - din logica propozitiilor eliminam echivalenta ($\leftrightarrow$) si o inlocuim cu varianta ei echivalenta: $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$?
  - s-ar obtine un limbaj echivalent logic cu logica propozitiilor.
- Simplificarea poate merge si mai departe, a.i. orice propozitie compusa poate fi scrisa folosind numai negatia, o alta conectiva logica si paranteze.

Un numar minim de conective

- **Exc10**: Utilizand numai negatia, implicatia si paranteze scrieti propozitii care sunt logic echivalente cu cele de mai jos:
  1. $p \vee q$
  2. $p \wedge q$
  3. $p \leftrightarrow q$
- **Exc11**: Utilizand numai negatia, disjunctia si paranteze scrieti propozitii care sunt logic echivalente cu cele de mai jos:
  1. $p \wedge q$
  2. $p \rightarrow q$
  3. $p \leftrightarrow q$
  4. $\neg p \wedge \neg q$