

**Validitate, contingenta,  
nesatisfiabilitate**

# Scurta recapitulare

- Ce este o propozitie
- Operatori (conective) logici(e):  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\oplus$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ 
  - Nume, notatii
  - Conexiunea logica cu limbajul natural
  - Tabele de adevar si prioritati
- Propozitii compuse
  - Trecerea din limbaj natural in propozitii compuse
  - Trecerea din propozitii compuse in limbaj natural
  - Analiza propozitiilor compuse cu ajutorul tabelor de adevar
- Operatii pe biti
- Puzzle-uri logice

# Sintaxa logicii propozitionale

- Propozitii:
  - Atomice, simple
  - Compuse, complexe
- Propozitii atomice – adevarate sau false
  - ex:  $p, q, r$
- Propozitii compuse sau formule propozitionale (notate cu *propozitie* mai jos)
  - $\neg$  *propozitie*
  - *propozitie* **conectiva** *propozitie*
- Conective (operatori) binare(i):  $\wedge, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow$

# Tema - Puzzle

- Un detectiv are 4 martori la o crima.
  - Daca majordomul spune adevarul atunci si bucatarul spune adevarul
  - Bucatarul si gradinarul nu pot spune concomitent adevarul
  - Gradinarul si mesterul nu pot minti concomitent
  - Daca mesterul spune adevarul atunci bucatarul minte
- Poate detectivul spune cine spune adevarul si cine minte?

1. Daca majordomul spune adevarul atunci si bucatarul spune adevarul
2. Bucatarul si gradinarul nu pot spune concomitent adevarul
3. Gradinarul si mesterul nu pot minti concomitent
4. Daca mesterul spune adevarul atunci bucatarul minte

- Notam cu  $A =$  "majordomul spune adevarul",  $B =$  "bucatarul...",  $C =$  "gradinarul",  $D =$  "mesterul"
- Atunci,
  - 1 va fi  $A \rightarrow B$
  - 2 va fi  $(B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C)$
  - 3 va fi  $(C \wedge D) \vee (\neg C \wedge D) \vee (C \wedge \neg D)$
  - 4 va fi  $D \rightarrow \neg B$
- Verificam ce se poate obtine din  $1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4$ .

# Tema puzzle

- A = "majordomul", B = "bucatarul", C = "gradinarul", D = "mesterul"

	A	B	C	D	(A => B) & ((B & ~C) v (~B & C) v (~B & ~C)) & ((C & ~D) v (C & D) v (~C & D)) & (D => ~B)																
0)	T	T	T	T	T	F	FF	F	F	F	F	F	FF	T	T	T	F	F	F	F	F
1)	T	T	T	F	T	F	FF	F	F	F	F	F	TT	T	F	T	F	F	F	F	F
2)	T	T	F	T	T	T	TT	T	F	F	F	T	FF	F	F	T	T	T	F	F	F
3)	T	T	F	F	T	T	TT	T	F	F	F	T	FT	F	F	F	T	F	F	F	F
4)	T	F	T	T	F	F	FF	T	T	T	T	T	FF	T	T	T	F	F	F	F	F
5)	T	F	T	F	F	F	FF	T	T	T	T	T	TT	T	F	T	F	F	F	F	F
6)	T	F	F	T	F	F	FT	F	T	F	T	T	TT	F	FF	F	F	T	T	T	F
7)	T	F	F	F	F	F	FT	F	T	F	T	T	TT	F	FT	F	F	F	T	F	F
8)	F	T	T	T	T	F	FF	F	F	F	F	F	FF	T	T	T	F	F	F	F	F
9)	F	T	T	F	T	F	FF	F	F	F	F	F	TT	T	F	T	F	F	F	F	F
10)	F	T	F	T	T	T	TT	T	F	F	F	T	FF	F	F	T	T	T	F	F	F
11)	F	T	F	F	T	T	TT	T	F	F	F	T	FT	F	F	F	T	F	F	F	F
12)	F	F	T	T	T	T	FF	T	T	T	T	T	FF	T	T	T	F	F	F	F	F
13)	F	F	T	F	T	T	FF	T	T	T	T	T	TT	T	F	T	F	F	F	F	F
14)	F	F	F	T	T	T	FT	F	T	F	T	T	TT	T	FF	F	F	T	T	T	F
15)	F	F	F	F	T	T	FT	F	T	F	T	T	TT	F	FT	F	F	F	T	F	F

- Detectivul poate spune ca majordomul (A) si bucatrul (B) mint, despre ceilalti doi ca nu mint concomitent.

# Logica propozitionala

- **Def1:** O propozitie atomica sau negatia unei propozitii atomice se numeste *literal*.
- Semantica se refera la atribuirea (asignarea) de valori de adevar (evaluarea, *interpretarea*) variabilelor propozitionale.

Tabela de adevar pentru implicatia  $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$

Interpretarea	$p$	$q$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
1	A	A	F	A	A	A
2	A	F	A	A	F	F
3	F	A	F	F	F	A
4	F	F	A	A	F	F

# Interpretari

- O propozitie atomica are  $2^1$  interpretari.
  - $p = \text{"Radu e atragator."}$
  - Poate fi interpretata ca adevarata (de Ana) sau falsa (de Monica).
- O propozitie compusa ( $p \wedge q$ ) cu 2 variabile are  $2^2$  interpretari.
  - int<sub>1</sub>:  $p$  si  $q$  sunt ambele adevarate (AA)
  - int<sub>2</sub>:  $p$  si  $q$  sunt ambele adevarate (FF)
  - int<sub>3</sub>:  $p$  este adevarata si  $q$  este falsa (AF)
  - int<sub>4</sub>:  $p$  este falsa si  $q$  este adevarata (FA)
- O propozitie compusa cu  $n$  variabile are  $2^n$  interpretari.



# Interpretari

- Cum se completeaza interpretarile unei formule propozitionale de  $n$  variabile intr-o tabela de adevar?
  - Pentru prima variabila (prima coloana) completam  $2^{n/2}$  valori de A si tot atatea de F.
  - Pentru variabila a doua completam  $2^{n/4}$  valori de A urmate de  $2^{n/4}$  F apoi din nou  $2^{n/4}$  A si  $2^{n/4}$  F.
  - ... Ultima coloana (si variabila) va contine alternativ A si F.
- **Ex1:** pentru 4 variabile  $p, q, r, s$  ( $2^4 = 16$  interpretari)

# 16 interpretari pentru 4 variabile

Interpretari	p	q	r	s
1	A	A	A	A
2	A	A	A	F
3	A	A	F	A
4	A	A	F	F
5	A	F	A	A
6	A	F	A	F
7	A	F	F	A
8	A	F	F	F
9	F	A	A	A
10	F	A	A	F
11	F	A	F	A
12	F	A	F	F
13	F	F	A	A
14	F	F	A	F
15	F	F	F	A
16	F	F	F	F

# Validitate (ne)satisfiabilitate, contingenta

- **Def2:** O propozitie este *valida* (sau tautologie) daca si numai daca este **adevarata** in toate interpretarile posibile.
  - O propozitie este valida daca in ultima coloana a tabeli de adevar are valoarea **A pe toate liniile**.
- **Ex2:**
  - Merg sau nu merg la concert.
  - $p = \text{“merg la concert”}$
  - $p \vee \neg p$ 
    - Propozitia compusa este adevarata in orice interpretare.

# Validitate

- Pentru a fi valida, o formula propozitionala trebuie sa aiba pe ultima coloana a tabeli de adevar valoarea **A pe toate liniile**.
  - Prin urmare, trebuie construita intreaga tabela de adevar!

- **Exc1:**

Aratati ca  $(p \wedge q) \rightarrow p$  este valida.

# Validitate (ne)satisfiabilitate, contingenta

- **Def<sub>3</sub>**: O formula propozitională este *satisfiabilă* dacă și numai dacă există cel puțin o interpretare în care este adevărată.
  - O propoziție este satisfiabilă dacă în ultima coloană a tabelului de adevăr există **cel puțin un A**.
- **Ex<sub>3</sub>**:
  - $p = \text{“Afara plouă”}$ ,  $q = \text{“Este zăpadă la munte”}$
  - Satisfiabile:  $p$ ,  $p \wedge q$ ,  $p \vee q$ , etc
- Evident, o propoziție validă este satisfiabilă.

# Satisfiabilitate

- O propozitie este satisfiabila daca in ultima coloana a tabelii de adevar exista **cel putin un A**.
- Prin urmare, nu trebuie sa construim toata tabela de adevar, ci doar sa gasim o linie cu valoarea A.
- **Ex4:**
  - Aratati ca

$$p \wedge (q \vee r)$$

este satisfiabila.

# Satisfiabilitate

- **Ex4** (cont):
  - Aratati ca  $p \wedge (q \vee r)$  este satisfiabila.
- Completam cu A la ultima coloana si apoi cautam valori de adevar potrivite (daca exista).

$p$	$q$	$r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
				A

# Satisfiabilitate

- **Ex4** (cont):
  - Aratati ca  $p \wedge (q \vee r)$  este satisfiabila.
- Avem conjunctie pe ultima coloana, prin urmare, ambele propozitii componente trebuie sa fie adevarate.

$p$	$q$	$r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
A			A	A



# Satisfiabilitate

- **Ex4** (cont):
  - Aratati ca  $p \wedge (q \vee r)$  este satisfiabila.
- $q \vee r$  trebuie sa fie adevarat. Avem trei posibilitati: AA, AF sau FA. Alegem una la intamplare.
  - Am demonstrat ca formula este satisfiabila.

$p$	$q$	$r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
A	F	A	A	A

# Validitate (ne)satisfiabilitate, contingenta

- **Def4:** O propozitie care nu este satisfiabila este *nesatisfiabila* (sau contradictie).
  - Adica propozitia este falsa in toate interpretarile.
  - In limbajul natural, propozitiile care se contrazic sunt nesatisfiabile.
- O propozitie este nesatisfiabila daca in ultima coloana a tabelii de adevar are valoarea F pe toate liniile.
- **Ex5:**
  - Voi trece si voi pica examenul de logica computationala.
  - $p$  = "voi trece examenul de logica computationala"
  - $p \wedge \neg p$

# Nesatisfiabilitate

- Cum trebuie sa fie numai F pe ultima coloana a tablei de adevar, intreaga tabela trebuie construita.
- **Exc2:**
  - Aratati ca  $[(p \leftrightarrow p) \rightarrow p] \wedge \neg (p \rightarrow p)$  este nesatisfiabila.

# Validitate (ne)satisfiabilitate, contingenta

- **Def5:** O propozitie este *contingenta* daca nu este nici valida, nici nesatisfiabila.
  - In ultima coloana a tabelului de adevar exista **cel putin un A si cel putin un F.**
- **Ex6:**
  - $p = \text{"Afara ploua"}, q = \text{"Este zapada la munte"}$
  - Satisfiabile:  $p, p \wedge q, p \vee q$ , etc
- O propozitie contingenta este si satisfiabila, nu si invers.

# Contingenta

- Avem nevoie de cel puțin un A și cel puțin un F.
  - Construim o tabelă de adevăr cu **două linii**, una care să pornească de la A pe ultima coloană, iar alta de la F.
- **Ex7:**
  - Arătați că  $[(p \vee q) \wedge r] \rightarrow q$  este contingenta. (rezolvarea la tablă)

# Exercitiu (0.5 p, 5 min)

- **Exc3:** Determinati daca fiecare propozitie este valida, satisfiabila, contingenta sau nesatisfiabila:
  1.  $p \vee p$
  2.  $q \rightarrow \neg q$
  3.  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$
  4.  $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
  5.  $((p \wedge q) \wedge r) \rightarrow q$
  6.  $(q \wedge s) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (p \vee r))$

# Consistentă

- O mulțime de propoziții din limbajul natural este **consistentă** dacă este posibil d.p.d.v. logic ca toate să fie adevărate o dată.
- O mulțime de propoziții din logica propozițională este **consistentă** dacă există cel puțin o linie dintr-o tabelă de adevăr în care toate propozițiile sunt concomitent adevărate.
  - *Toate propozițiile* presupune ca propozițiile din mulțime să fie conectate cu *și logic* ( $\wedge$ ).
  - Altfel, este **inconsistentă**.
  - La puzzle-uri, noi verificăm **consistentă** afirmațiilor.

# Consistentă

- Nu necesită construirea unei întregi tabelă de adevăr,
  - doar găsirea unei linii în care toate propozițiile implicate sunt adevărate.
- Demonstrarea că o mulțime de formule propoziționale este **inconsistentă** necesită construirea unei tabelă de adevăr complete.
  - Trebuie arătat că pe fiecare linie a tabelă de adevăr există cel puțin o formulă din mulțime care este falsă – ceea ce ar face conjuncția tuturor falsă.
- **Ex8:** Să se verifice dacă mulțimea următoare de propoziții este consistentă sau inconsistentă (rezolvarea la tablă):

$$p \leftrightarrow (q \vee r), r \rightarrow \neg p, p \rightarrow \neg q$$



# Specificatii de sistem

- **Ex9:** Treceti din limbaj natural in logica propozitiilor:  
"Nu se poate face backup automat daca spatiul pe disc este complet ocupat."
  - $p$  = "Se poate face backup automat"
  - $q$  = "Spatiul pe disc este complet ocupat"

**Solutia:**  $q \rightarrow \neg p$

# Specificatii de sistem

- Trebuie sa fie **consistente**, adica sa nu existe cerinte aflate in conflict care sa duca la contradictie.
- **Ex10**: Sunt urmatoarele specificatii consistente?
  1. Mesajul de diagnosticare este stocat in buffer sau este retransmis.
  2. Mesajul de diagnosticare nu este stocat in buffer.
  3. Daca mesajul de diagnosticare este stocat in buffer, atunci este retransmis.

1. Mesajul de diagnosticare este stocat in buffer sau este retransmis.
2. Mesajul de diagnosticare nu este stocat in buffer.
3. Daca mesajul de diagnosticare este stocat in buffer, atunci este retransmis.

- $p$  = "Mesajul de diagnosticare este stocat in buffer"
- $q$  = "Mesajul de diagnosticare este retransmis"
- $1 = p \vee q; \quad 2 = \neg p; \quad 3 = p \rightarrow q$
- Pentru a fi toate adevarate (inclusiv 2)  $\Rightarrow p$  este fals.
- Pentru 1 adevarat  $\Rightarrow q$  adevarat  $\Rightarrow 3$  adevarat, deci 1, 2 si 3 sunt consistente pt ca pt  $p$  fals si  $q$  adevarat, toate (1,2,3) sunt adevarate.

1. Mesajul de diagnosticare este stocat in buffer sau este retransmis.
2. Mesajul de diagnosticare nu este stocat in buffer.
3. Daca mesajul de diagnosticare este stocat in buffer, atunci este retransmis.

- $p$  = "Mesajul de diagnosticare este stocat in buffer"
- $q$  = "Mesajul de diagnosticare este retransmis"
  
- **Exc4:** Daca la Ex10 adaugam si afirmatia "Mesajul de diagnosticare nu este retransmis", raman toate 4 specificatiile consistente?

# Specificatii de sistem

0.5 puncte la examen  
Timp de lucru: 5 min

- **Exc5:** Sunt urmatoarele specificatii consistente?
  - De cate ori se actualizeaza software-ul sistemului, utilizatorii nu pot accesa fisierele sistemului.
  - Daca utilizatorii pot accesa fisierele sistemului, atunci ei pot salva noi fisiere.
  - Daca utilizatorii nu pot salva noi fisiere, atunci software-ul sistemului este actualizat.

# Consistentă

- **Exc6:** Determinati daca fiecare set de propozitii este consistent sau inconsistent:
  1.  $p \rightarrow \neg p, \neg p \rightarrow \neg p, p \wedge p, p \vee p$
  2.  $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$
  3.  $p \vee q, q \vee r, r \rightarrow \neg p$
  4.  $p \rightarrow (q \vee r), r \rightarrow \neg p, p \rightarrow \neg q$