

Introducere in

Logica computationala

Catalin Stoean

catalin.stoean@inf.ucv.ro

<http://inf.ucv.ro/~cstoean>

1

Informatii generale

- Zi, ora, loc
 - Semestrul al II-lea, miercuri, 14-16, sala 113.
- Pagina web a cursului
 - <http://inf.ucv.ro/~cstoean/courses/lc/>
- Nota finala
 - 50% nota laborator
 - 50% nota examen scris (in sesiune)
 - Sanse aditionale - rezolvarea altor exercitii/proiecte/programe cerute in cadrul cursului
 - Se obtin **puncte** care se aduna la nota examen scris sau chiar la cea finala, dupa caz

2

Informatii generale

- **Predarea** cuprinde
 - Prezentare powerpoint: definitii, teoreme, exemple
 - Tabla: rezolvare exercitii, explicatii
- **Responsabilitatea studentilor**
 - Sa noteze rezolvare, sa puna intrebari, sa rezolve exercitii – mai ales pentru puncte ☺ - sa verifice actualizarile pe pagina web.

3

Bibliografie

- Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 6th edition, McGraw-Hill, 2007
- S. Russell, P. Norvig, *Artificial Intelligence. A Modern Approach*, Prentice Hall, 1995.
- N. Tandareanu, *Introducere in programarea logica. Limbajul Prolog*, Editura Intarf, 1994.

4

Cuprinsul cursului

1. Introducere
2. Logica propozitiilor
3. Echivalente propozitionale
4. Logica predicatelor
5. Reguli de inferenta
6. Demonstratii – metode si strategii

5

Logica... ajuta? Puzzle-uri

Cinstitul si mincinosul

Cinstitul spune mereu adevarul

Mincinosul minte tot timpul

Intalnesti doua persoane A si B

A spune: "B este cinstit"

B spune: "Unul din noi este cinstit, celalalt este mincinos."

- **Intrebare: Ce sunt A si B?**

6

Logica... ajuta? Puzzle-uri

- Un detectiv are 4 martori la o crima.
 - Daca majordomul spune adevarul atunci si bucatarul spune adevarul
 - Bucatarul si gradinarul nu pot spune concomitent adevarul
 - Gradinarul si mesterul nu pot minti concomitent
 - Daca mesterul spune adevarul atunci bucatarul minte
- Poate detectivul spune cine spune adevarul si cine minte?

7

Ce este logica?

- Logica computationala
 - O unalta ce ofera intelesuri precise pentru afirmatii matematice
 - Baza rationamentului matematic si al celui automat
 - Contine un limbaj formal clar cu notatii precise
 - O metodologie de rationament obiectiv despre adevar si fals
- Aplicatii (din informatica)
 - Design-ul circuitelor de calculatoare
 - Inteligenta artificiala
 - Limbaje de programare
 - Verificarea corectitudinii programelor etc

8

Logica propozitiilor

- **Def1:** O **propozitie** este o afirmatie **declarativa** care este adevarata (A) sau falsa (F), **nu** ambele simultan.
- **Ex1:** propozitii
 1. Bucuresti este capitala Romaniei
 2. Shanghai este capitala Chinei
 3. $2 + 3 = 5$
 4. $2 + 6 = 7$
- **Ex2:** nu sunt propozitii
 - Cati studenti sunt in sala? (intrebare)
 - Va rog sa faceti liniste. (comanda)
 - Ce liniste este in sala! (exclamatie)
 - $X + 2 = 5$ (ar putea fi si A, si F)

9

Exercitiu

- **Exc1:** propozitii sau nu?
 1. Sunteti la cursul de logica computationala.
 2. Exista viata pe Marte.
 3. $2 + 3$.
 4. Daca $x = 3$ atunci $x + 2 = 7$.
 5. In sala sunt numai studenti interesati de acest curs.

10

*Educatia reprezinta cea mai buna provizie pentru calatoria spre batranete.
Aristotel*

Logica propozitiilor

- **Def2:** O **variabila propozitionala** este o variabila peste domeniul $\{A, F\}$ care reprezinta o propozitie. Notatii: p, q, r, p1, p2, ...
- **Def3:** **Valoarea de adevar** a unei propozitii este adevarat (A), daca este adevarata si fals (F), daca este falsa.
- **Def4:** Prin combinatia de propozitii cu ajutorul **operatorilor logici** se obtin **propozitii compuse**.
- Partea de logica propozitiilor a fost sistematic construita de catre filozoful grec Aristotel in urma cu peste 2300 de ani.

11

Operatori logici (conective logice)

- Cei mai intalniti operatori logici

Operator	Notatie	Semn
Negatia	NOT	\neg
Conjunctia	AND	\wedge
Disjunctia	OR	\vee
Sau exclusiv	XOR	\oplus
Implicatia	IMPLICA	\rightarrow
Echivalenta	IFF	\leftrightarrow

- Negatia este singurul operator unar, toti ceilalti sunt binari.

12

Operatorul de negatie

- **Def5:** Fie p o propozitie. *Negatia unei propozitii p* , notata prin $\neg p$, reprezinta afirmatia
 - “Nu se intampla p ” sau “ p este fals”
- Propozitia $\neg p$ se citeste “not p ”, iar valoarea ei de adevar este opusul valorii de adevar a lui p .
- **EX3:**
 - p = “Azi e vineri”
 - $\neg p$ = “Nu este cazul ca azi e vineri” sau “Azi nu e vineri”

Tabela de adevar pentru negatie	
p	$\neg p$
A	F
F	A

13

Conjunctia

- **Def6:** Fie p si q propozitii. *Conjunctia dintre p si q* , notata $p \wedge q$, este propozitia “ p si q ”. Ea este adevarata cand p si q sunt ambele adevarate si falsa altfel.
- **Ex4:**
 - p = “Azi e vineri.”
 - q = “Azi ploua.”
 - $p \wedge q$ = “Azi e vineri si azi ploua.”
 - Propozitia este adevarata intr-o zi de vineri ploioasa si este falsa in orice zi daca nu e vineri si in orice zi de vineri in care nu ploua.

Tabela de adevar pentru conjunctie		
p	q	$p \wedge q$
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	F

14

Disjunctia

- **Def7:** Fie p si q propozitii. *Disjunctia dintre p si q* , notata $p \vee q$, este propozitia “ p sau q ”. Ea este falsa cand ambele p si q sunt false si adevarata altfel.
- Disjunctia se mai numeste si **sau inclusiv**.
- **Ex5:**
 - p = “Azi e vineri.”
 - q = “Azi ploua.”
 - $p \vee q$ = “Azi e vineri sau azi ploua.”
 - Adevarata in orice zi de vineri si in orice zi in care p nici vineri si nici nu ploua.

Tabela de adevar pentru disjunctie		
p	q	$p \vee q$
A	A	A
A	F	A
F	A	A
F	F	F

15

Sau exclusiv

- **Def8:** Fie p si q propozitii. *Sau exclusiv intre p si q* , notat $p \oplus q$, este propozitia care este adevarata cand numai una din cele doua este adevarata, si falsa altfel.
- **Ex6:**
 - p = “Voi lua examenul la logica computationala.”
 - q = “Voi pica examenul la logica computationala.”
 - $p \oplus q$ = “Voi lua sau voi pica examenul la LC.”

Tabela de adevar pentru sau exclusiv		
p	q	$p \oplus q$
A	A	F
A	F	A
F	A	A
F	F	F

16

Sau inclusiv/exclusiv

- **Ex7: sau inclusiv** (merg si ambele!)
 - O parola trebuie sa aiba cel putin 2 cifre sau sa aiba cel putin 8 caractere lungime.
 - Experienta in Java sau in C++ este necesara.
- **sau exclusiv** (doar una din cele doua!)
 - Garantia masinii este pana la 2 ani sau pana la 100 000 km parcursi.
 - Se poate plati cu lei sau cu euro.
- Limbajul natural poate fi ambiguu
 - Maine poate fi insorit **sau** partial noros.

17

Implicatia

- **Def9:** Fie p si q propozitii. *Implicatia dintre p si q* , notat $p \rightarrow q$, este propozitia “daca p , atunci q ”. (p = ipoteza, q = concluzia)
- Se mai citeste:
 - “daca p , q ”, “ p este **suficient** pentru q ”, “ q daca p ”,
 - “ q cand p ”, “ q reiese din p ”, “ p implica q ”,
 - “ q este **necesar** pentru p ”, “ p numai daca q ”.
- **Ex8:**
 - p = “eu sunt ales”
 - q = “eu voi micsora taxele”
 - $p \rightarrow q$ = “daca sunt ales, voi micsora taxele.”

Tabela de adevar pentru implicatie		
p	q	$p \rightarrow q$
A	A	A
A	F	F
F	A	A
F	F	A

18

Implicatia

- Implicatia trebuie privita ca un **contract** sau o **obligatie**.
- **Ex8** (cont):
 - p = "eu sunt ales", q = "eu voi mica taxa taxele"
 - $p \rightarrow q$ = "daca sunt ales, voi mica taxa taxele."
- Doar daca sunt ales (p adevarat) si nu mica taxa taxele (q - fals), votantii se simt inselati. $p \rightarrow q$ este fals.
- Are aceleasi valori de adevar ca si $\neg p \vee q$.
- **Exc2**:
 - Daca studentul rezolva subiectele 100%, va lua nota 10.
 - Care este p , care q si cand este $p \rightarrow q$ fals?

19

Implicatia

- **Ex10**: secventa de program
 - Ce valoare va lua x dupa executia
 - "Daca $2 + 3 == 5$ atunci $x = x + 1$ ", daca inainte de ea, $x = 3$?
 - Evident, simbolul "==" se refera la verificarea egalitatii si "=" la asignare.
 - Cum $2 + 3 = 5$ este adevarat, se executa $x = x + 1$, deci valoarea lui x creste de la 3 la 4 ($x = 3 + 1$).

21

Implicatia

- Limbajul propozitional este unul artificial – doar facem paralele cu cel natural pentru a-l intelege pe primul mai usor.
- **Ex9**:
 - Daca azi e joi, atunci $1 + 1 = 3$. (A sau F)
 - Daca azi e joi, atunci $1 + 1 = 2$. (A sau F)
- Constructiile *daca-atunci* din majoritatea limbajelor de programare sunt diferite de implicatiile din logica.
 - "Daca p atunci S ", unde p este o conditie, iar S o secventa de program.

20

Reciproca, contrapozitiva si inversa lui

$$p \rightarrow q$$

- Reciproca: $q \rightarrow p$
- Contrapozitiva: $\neg q \rightarrow \neg p$
- Inversa: $\neg p \rightarrow \neg q$
- **Def10**: Cand doua propozitii compuse au aceleasi valori de adevar, spunem ca sunt *echivalente*.
- Implicatia $p \rightarrow q$ este echivalenta cu contrapozitiva $\neg q \rightarrow \neg p$.
- **Exc3**: Care sunt reciproca, contrapozitiva si inversa pentru:
 - Vin la facultate cand am examen.

22

Echivalenta

- **Def11**: Fie p si q propozitii. *Echivalenta dintre p si q* , notat $p \leftrightarrow q$, este propozitia " **p daca si numai daca q** ". Este adevarata cand p si q au aceleasi valori de adevar si falsa altfel.
- Se mai citeste:
 - " p este necesar si suficient pentru q ",
 - "daca p atunci q si viceversa", " p iff q "
- Aceleasi valori de adevar ca si $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.
- **Ex11**:
 - p = "Poti lua avionul", q = "Cumperi bilet",
 - $p \leftrightarrow q$ = "Poti lua avionul daca si numai daca cumperi bilet."

Tabela de adevar pentru echivalenta		
p	q	$p \leftrightarrow q$
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	A

23

Echivalenta

- Folosirea implicita in limbajul natural
 - De obicei se foloseste "daca, atunci" sau "doar daca".
- **Ex12**:
 - "Daca iti termini portia, poti lua si desert."
- In cadrul acestui curs insa, vom fi precisi pentru a putea distinge $p \rightarrow q$ de $p \leftrightarrow q$.

24

Adevarat sau fals?

0.5 puncte la examenul final
Timp de lucru: 3 min

- **Exc4:** Verificati daca urmatoarele propozitii sunt adevarate:
 1. $2 + 2 = 4$ daca si numai daca $1 + 1 = 2$
 2. $1 + 1 = 3$ daca si numai daca $1 < 2$
 3. $1 + 1 = 2$ daca si numai daca maimutele zboara
 4. Daca $1 + 1 = 2$ atunci $2 + 2 = 5$
 5. Daca $1 + 1 = 2$ atunci $2 + 2 = 4$
 6. Daca $1 + 1 = 3$ atunci cainii pot rezolva integrale

25

Din logica in limbaj natural

- **Exc5:** $p =$ "Am luat un bilet la loto saptamana trecuta"
- $q =$ "Am castigat 1 milion de euro duminica".
- Transformati urmatoarele propozitii compuse in limbaj natural
 - $\neg p, p \vee q, p \rightarrow q, p \wedge q, p \leftrightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q, \neg p \wedge \neg q, \neg p \vee (p \wedge q)$

26

Prioritatea operatorilor logici

- **Ex12:**
 - $\neg r \wedge s \rightarrow q$ sau $(\neg (r \wedge s)) \rightarrow q$ sau $(\neg r) \wedge (s \rightarrow q)$ sau $\neg (r \wedge (s \rightarrow q))$ sau $((\neg r) \wedge s) \rightarrow q$?
- Prioritatea (incepand cu cea mai mare): $\neg, \wedge, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow$

Operator	Notatie	Semn	Prioritatea
Negatia	NOT	$\neg p$	1
Conjunctia	AND	$p \wedge q$	2
Disjunctia	OR	$p \vee q$	3
Sau exclusiv	XOR	$p \oplus q$	4
Implicatia	IMPLICA	$p \rightarrow q$	5
Echivalenta	IFF	$p \leftrightarrow q$	6

27

Propozitii atomice vs. compuse

- **Propozitiile atomice** (sau simple)
 - sunt propozitiile care pot fi simbolizate prin litere
 - reprezinta cele mai mici componente ale logicii propozitiilor
 - sunt blocurile ce duc la formarea de propozitii complexe.
 - le vom nota cu p, q, r, p_1, p_2 etc
- **Propozitiile complexe** (sau compuse)
 - se obtin prin combinarea de propozitii atomice cu ajutorul conectivelor logice.
 - le vom nota cu litere mari: A, B, P, Q etc sau cu litere grecești: $\alpha, \beta \dots$

28

Formule logice bine formate

- **Def11:** (foloseste recursivitatea)
 1. Fiecare propozitie atomica este o formula bine formata (*fbf*).
 2. Daca A este o *fbf*, atunci $\neg A$ este o *fbf*.
 3. Daca A si B sunt *fbf*, atunci $(A \wedge B)$ sunt *fbf*.
 4. Daca A si B sunt *fbf*, atunci $(A \vee B)$ sunt *fbf*.
 5. Daca A si B sunt *fbf*, atunci $(A \oplus B)$ sunt *fbf*.
 6. Daca A si B sunt *fbf*, atunci $(A \rightarrow B)$ sunt *fbf*.
 7. Daca A si B sunt *fbf*, atunci $(A \leftrightarrow B)$ sunt *fbf*.
- Este $\neg \neg (p \wedge q)$ o *fbf*?

29

Tabele de adevar

- Se folosesc pentru a gasi valorile de adevar pentru propozitii compuse.
- Folosim coloane separate pentru subcomponentele ale propozitiei compuse de evaluat. Componentele se folosesc pentru a calcula valorile de adevar ale propozitiei compuse in ultima coloana.
- O propozitie compusa de k variabile genereaza o tabela de 2^k linii.

30

Cum se completeaza tabela?

- Jumatate din linii de pe **prima coloana** se completeaza cu A, cealalta jumătate cu F,
- un sfert din **coloana a doua** cu A, apoi un sfert cu F, din nou un sfert cu A si ultimul sfert cu F
- o optime din **coloana a treia** cu A, urmatoarea cu F, apoi A, ..., ultima optime cu F
- Pe ultima coloana ar trebui sa avem A urmat de F, apoi A, apoi F,... pana jos.

31

Tabele de adevar

- **Ex13:**
 - Construiti tabela de adevar pentru $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$

Tabela de adevar pentru echivalenta $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$					
p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
A	A	F	A	A	A
A	F	A	A	F	F
F	A	F	F	F	A
F	F	A	A	F	F

32

Tabele de adevar

- **Exc6:** Construiti tabele de adevar pentru:
 - $p \rightarrow \neg p; p \vee \neg p; (p \vee \neg q) \rightarrow q; (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q);$
 - $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p); p \oplus (p \vee q)$
 - $(q \rightarrow \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q); p \rightarrow (\neg q \vee r)$
 - $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s$

33

Din limbajul natural in logica propozitionala

- Limbajul natural este ambiguu
- Trecerea in logica elimina ambiguitatea
 - Putem analiza expresiile logice pentru a gasi valorile de adevar, le putem manipula sau folosi reguli de inferenta pe ele
- **Ex14:** Nu te poti urca in roller coaster daca ai sub 120 cm decat daca ai mai mult de 16 ani.
- $p =$ "te poti urca in roller coaster", $q =$ "ai sub 120 cm inaltime",
- $r =$ "ai mai mult de 16 ani"

$$(q \wedge \neg r) \rightarrow \neg p$$

34

Din limbajul natural in logica propozitionala

- **Ex15:** Transformari din limbaj natural pentru:
 - $p =$ "Conduci cu peste 100 km/h"
 - $q =$ "Primesti amenda pentru viteza"
 - 1. Nu mergi cu peste 100 km/h ($\neg p$)
 - 2. Mergi cu peste 100 km/h, dar nu primesti amenda pentru viteza ($p \wedge \neg q$)
 - 3. Primesti amenda pentru viteza daca conduci cu peste 100 km/h ($p \rightarrow q$)
 - 4. Daca nu conduci cu peste 100 km/h atunci nu primesti amenda pentru viteza ($\neg p \rightarrow \neg q$)
 - 5. Sa conduci cu peste 100 km/h este suficient pentru a primi amenda pentru viteza ($p \rightarrow q$)

35

Din limbajul natural in logica propozitionala

- **Ex15 (cont):** Transformari din limbaj natural pentru:
 - $p =$ "Conduci cu peste 100 km/h"
 - $q =$ "Primesti amenda pentru viteza"
 - 6. Primesti amenda pentru viteza, dar nu conduci cu peste 100 km/h. ($q \wedge \neg p$)
 - 7. De cate ori primesti amenda pentru viteza, conduci cu peste 100 km/h. ($q \rightarrow p$)

36

Din limbajul natural in logica propozitionala

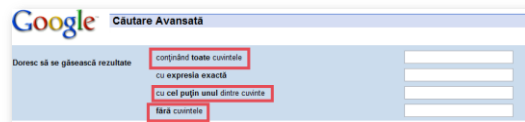
0.5 puncte la examen
Timp de lucru: 5 min

- **Exc7:** Transformati din limbaj natural in logica propozitionala
 - p = “lei 10 pentru laborator”, q = “Rezolvi toate exercitiile date”, r = “lei 10 la examenul final”
1. lei 10 la examenul final dar nu rezolvi toate exercitiile date.
 2. lei 10 pentru laborator, rezolvi toate exercitiile date si lei 10 la examenul final.
 3. Pentru a lua 10 la examenul final, este necesar sa iei 10 pentru laborator.
 4. lei 10 pentru laborator, dar nu rezolvi toate exercitiile date; totusi, iei 10 la examenul final.
 5. Sa iei 10 pentru laborator si sa rezolvi toate exercitiile date este suficient pentru a lua 10 la examenul final.
 6. lei 10 la examenul final daca si numai daca rezolvi toate exercitiile date sau iei 10 pentru laborator.

37

Cautari booleene

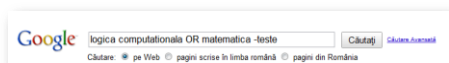
- Conectivile logice – utilizate in cautari asupra colectii masive de informatii (indecsi de pagini web) => *cautari booleene*.
 - AND – este implicit si ia toti termenii introdusi – de obicei spatiu.
 - OR – ia un termen sau altul (din doi)
 - NOT – se cauta rezultate care sa nu contina acel termen (notat si “-”)



38

Cautari booleene

- **Ex16:** Vrem sa gasim pagini web despre logica computationala sau matematica insa fara teste de logica.



39

Operatii pe biti

- Bit (binary digit): 0 (F) si 1 (A)
- **Variabila booleana** – are doar una din cele doua valori (A sau F).
- **Operatiile pe biti** din calculator corespund conectivelor logice.
- Notatii diferite: F devine 0, A devine 1, \wedge devine AND, \vee devine OR, \oplus devine XOR.
- **Def12:** Un **sir de biti** este o secventa de zero sau mai multi biti.
- Doua siruri de biti de aceeasi lungime pot fi utilizate pentru operatii precum AND, OR sau XOR. Bitii se iau unul cate unul.

40

Operatii pe biti

1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	
1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	OR
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	AND
0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	XOR

41

Operatii pe biti

- **Exc8:** Faceti calculele AND, OR si XOR pentru sirurile urmatoare de biti:
 - 101 1110, 001 0010
 - 1111 0010, 0011 1010
- **Exc9:** Calculati expresia
 - $(1\ 0011 \vee 0\ 1010) \wedge (0\ 1010 \oplus 1\ 0110)$

42

Puzzle-uri

Cinstitul si mincinosul

Cinstitul spune mereu adevarul

Mincinosul minte tot timpul

Intalnesti doua persoane A si B

A spune: "B este cinstit"

B spune: "Unul din noi este cinstit, celalalt este mincinos."

- **Intrebare: Ce sunt A si B?**
- rezolvarea la tabla.

43

Puzzle-uri

0.5 puncte la examenul final
Timp de lucru: 3 min

Exc10: Cinstitul si mincinosul II

Cinstitul spune mereu adevarul

Mincinosul minte tot timpul

Intalnesti doua persoane A si B

A spune: "Noi suntem amandoi cinstiti"

B spune: "A este mincinos."

- **Intrebare: Ce sunt A si B?**

44

Puzzle-uri

Tema 1 punct
Data limita: miercuri 10 martie

- **Exc11: Un detectiv are 4 martori la o crima.**
 - Daca majordomul spune adevarul atunci si bucatarul spune adevarul
 - Bucatarul si gradinarul nu pot spune concomitent adevarul
 - Gradinarul si mesterul nu pot minti concomitent
 - Daca mesterul spune adevarul atunci bucatarul minte
- Poate detectivul spune cine spune adevarul si cine minte?

45