
Petre Băzăvan

Sisteme Dinamice

Cuprins

1. Introducere	4
2. Ecuții diferențiale ordinare	6
2.1 Tipuri de ecuații diferențiale, soluții, exemple.....	6
2.2 Rezolvarea EDO liniare.....	21
2.3 Exemple de procese modelate prin EDO.....	63
2.4 Aspecte calitative legate de soluțiile EDO.....	72
2.5 Rezolvarea sistemelor de EDO.....	82
2.6 Rezolvarea numerică a sistemelor de EDO.....	114
3. Sisteme dinamice	122
3.1 Definirea sistemelor dinamice. Concepte de bază.....	122
3.2 Sisteme dinamice discrete.....	128
3.3 Studiul stabilității sistemelor dinamice continue.....	150
3.4 Comportament asimptotic.....	167
3.5 Soluții periodice. Stabilitatea acestora.....	171
3.6 Bifurcații.....	180
Bibliografie	194

Petre Bazavan

1. INTRODUCERE

Scopul principal al studiului sistemelor dinamice este de a înțelege comportamentul pe termen lung a stărilor unui sistem determinist. De multe ori, astfel de sisteme implică numeroase variabile și sunt neliniare.

Studiul comportamental al sistemelor dinamice necesită reprezentări grafice deosebit de complexe. Calculatoarele zilelor noastre pot realiza astfel de reprezentări, iar acest lucru a aprins interesul multor categorii de oameni de știință, și nu numai, pentru studiul sistemelor dinamice.

Această carte vine în sprijinul celor ce vor să facă primii pași în domeniul sistemelor dinamice.

Doarece există o strâsă legătură între ecuațiile diferențiale și sistemele dinamice continue, materialul prezentat abordează ambele domenii de studiu.

Astfel, prima parte a cărții este dedicată ecuațiilor diferențiale ordinare (EDO), rezolvării cazurilor liniare și prezentării unor aspecte de dinamică a EDO. În finalul primei părți este abordată rezolvarea numerică a EDO. Prin aceasta venim în sprijinul celor ce realizează studii aplicative.

A doua parte a cărții este dedicată prezentării principalelor concepte legate de sistemele dinamice discrete și continue, i.e. stabilitate, comportament asimptotic, soluții periodice, atractivitate și atractori, elemente de teoria bifurcațiilor.

Expunerea noastră este însoțită de numeroase exemple și exerciții rezolvate sau lăsate spre rezolvare.

Petre Bazavan

2. ECUAȚII DIFERENȚIALE ORDINARE

2.1. TIPURI DE ECUAȚII DIFERENȚIALE, SOLUȚII, EXEMPLE

Ecuția diferențială este o relație între variabile independente, variabile dependente și derivatele acestora în raport cu variabilele independente.

Ecuția diferențială ordinară (EDO) este ecuația diferențială care implică o singură variabilă independentă.

Ecuția diferențială cu derivate parțiale (PDE) este ecuația care implică derivate în raport cu două sau mai multe variabile independente.

Ordinul unei ecuații diferențiale este cel mai înalt ordin de derivare care apare în ecuație.

Exemple

EDO:

1. $m \frac{dv}{dt} = F(t, v)$
2. $ay'' + by' + cy = g(t)$
3. $\sin(y) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = (1-y) \frac{dy}{dx} + y^2 e^{-5y}$

PDE:

4. $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$
5. $\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial t} = 1 + \frac{\partial u}{\partial t}$

În continuare vom discuta în exclusivitate despre ecuațiile diferențiale ordinare – EDO.

Numeroase modele din lumea înconjurătoare implică relații între mărimi care depind de o variabilă independentă și derivatele acestora în raport cu variabila independentă.

O EDO poate fi formalizată astfel

$$F\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}, \frac{dx^2}{dt^2}, \dots, \frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}}, \frac{dx^n}{dt^n}\right) = 0 \quad (1.1)$$

unde t este o variabilă scalară (tipic, dar nu necesar, interpretată ca timp), F o funcție dată, x o funcție necunoscută și derivatele acesteia în raport cu t .

Exemple

EDO de ordinul I:
$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t))$$

EDO de ordinul II:
$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}\right)$$

Ecuației (1.1) i se asociază și n condiții inițiale:

$$x(t_0) = c_1; \frac{dx}{dt}(t_0) = c_2, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t_0) = c_n \quad (1.2)$$

O EDO poate fi scrisă și sub forma:

$$\dot{y} = f(t, y), y \in R^n, f : R \times R^n \rightarrow R^n \quad (1.3)$$

unde punctul reprezintă diferențierea în raport cu timpul iar n este ordinul ecuației. Pentru f se vor face considerațiile necesare la momentul potrivit.

Orice EDO de forma (1.1) poate fi rescrisă sub forma (1.3) notând astfel

$$y_{k+1} = \frac{d^k x}{dt^k}, \quad 0 \leq k \leq n - 1$$

$$\dot{y}_k = y_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n - 1$$

$$\dot{y}_n = F(t, y_1, \dots, y_n)$$

Fie $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ atunci avem:

$$f(t, y) = (y_2, \dots, y_n, F(t, y_1, \dots, y_n)).$$

Exemplu

Pentru ecuația $ay'' + by' + cy = 0$ notăm $x_1 = y$ și astfel avem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{a}(-cx_1 - bx_2) \end{cases}$$

unde

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \xrightarrow{f} \left(x_2, \frac{1}{a}(-ax_1 - bx_2) \right)$$

2.1.1. Existența și unicitatea soluției unei EDO

Fie EDO

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in R^n, \quad f : R^{n+1} \rightarrow R^n \quad (1.4)$$

căreia îi asociem condiția inițială

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in R^n. \quad (1.5)$$

Prin *soluție a ecuației* (1.4) în intervalul $\alpha < t < \beta$ înțelegem orice funcție $x(t)$ care este de n ori diferențiabilă și care satisface ecuația (1.4) pentru t în intervalul precizat. Din mulțimea de soluții poate fi aleasă una singură, anume cea care trece prin punctul (1.5). Perechea de ecuații (1.4)+(1.5) poartă numele de "problemă cu valori inițiale" (PVI). Soluția acesteia este o curbă $x = x(t)$ din R^n .

Enunțăm teorema de existență și unicitate a soluției pentru problema (1.4)+(1.5).

Teorema 2.1. *Fie PVI (1.4)+(1.5), unde $f : R \times R^n \rightarrow R^n$ este continuu diferențiabilă. Atunci există $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ astfel încât soluția $x(t)$ cu $x(t_0) = x_0$ pentru (1.4)+(1.5) există și este unică pentru toți $t \in (t_0 - t_1, t_0 + t_2)$.*

Soluția PVI (1.4)+(1.5) poate fi notată prin

$$x(t) = \psi(t, t_0, x_0) \quad (1.6)$$

unde am considerat $x_0 = (c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Relația (1.6) sugerează dependența soluției de condiția inițială.

Exemplul 1

$$\dot{x} = x, \quad x(0) = 1, \quad t \geq 0$$

Soluția există pentru orice $0 \leq t \leq a$, unde a este o constantă pozitivă arbitrară. Soluția este $x(t) = e^t$, poate fi extinsă pentru orice t și devine nemărginită pentru $t \rightarrow \infty$.

Exemplul 2

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1, \quad t \geq 0$$

Găsim soluția $x(t) = (1-t)^{-1}$ care există pentru $0 \leq t < 1$. Putem extinde intervalul de existență al soluției. Fie $M = (1+d)^2$. Soluția există și este unică pentru $0 \leq t \leq \inf\{\infty, d(d+1)^{-2}\} = d(d+1)^{-2}$.

Traectoria sau orbita pentru PVI (1.4)+(1.5) este curba din R^n

$$\{\psi(t, t_0, x_0), t \in (t_0 - t_1, t_0 + t_2)\}. \quad (1.7)$$

Curba soluție în $R \times R^n$ este

$$\left\{ \left[\begin{array}{c} t \\ \psi(t, t_0, x_0) \end{array} \right], t \in (t_0 - t_1, t_0 + t_2) \right\}. \quad (1.8)$$

2.1.2. Cazuri particulare de EDO

EDO autonomă

Dacă în (1.4) f nu depinde explicit de timpul t , i.e. $f: X \rightarrow R^n$, unde $X \subset R^n$ este o mulțime deschisă și nevidă, atunci ecuația

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.9}$$

se numește *autonomă*. f se numește câmp de vectori în X și are forma

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Dacă f este diferențiabilă atunci *matricea Jacobian* este

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

iar *Jacobianul* este $\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

Mulțimea X în care $x(t)$ ia valori se numește *spațiul stărilor* sau *spațiul fazelor*.

Ecuția (1.4) în care f depinde explicit de t se numește *neautonomă*.

EDO liniară

Dacă în (1.9) înlocuim $f(x)$ cu

$$\dot{x} = Ax + C, x \in R^n \quad (1.10)$$

unde $A : R^n \rightarrow R^n$ este un operator (sau o matrice $n \times n$) iar $C \in R^n$, atunci EDO (1.10) se numește *liniară neomogenă*. Cazul $\dot{x} = Ax$, $x \in R^n$ se numește EDO *liniară omogenă*.

Dacă în (1.10) A și/sau C depind explicit de t , i.e. $A = A(t)$, $C = C(t)$, atunci ecuația este *neautonomă*. Altfel, este *autonomă*.

Soluții implicite și explicite

Orice soluție care este dată sub forma $x = x(t)$ este *explicită*. O soluție *implicită* este acea funcție care nu este dată sub forma de mai sus.

Exemplul 1 fie PVI: $y' = \frac{t}{y}$, $y(2) = -1$.

Soluția implicită este $y^2 = t^2 - 3$. Pentru a găsi soluția explicită, fie $y(t) = \pm \sqrt{t^2 - 3}$. Considerând și $y(2) = -1$ rezultă $y(t) = -\sqrt{t^2 - 3}$ soluția explicită.

În continuare prezentăm exemple de EDO și soluțiile acestora.

Considerăm a doua lege a mișcării (Newton).

”Dacă un obiect de masă m se deplasează cu o accelerație a sub acțiunea unei forțe F , atunci $F = ma$ ”.

Dacă notăm cu v viteza obiectului, atunci $a = \frac{dv}{dt}$ și avem:

$$m \frac{dv}{dt} = F(t, v) \quad (1.11)$$


Exemplul 2

Un alt proces fizic simplu este căderea unui obiect de masă m .

Asupra obiectului acționează două forțe:

– forța gravitațională F_G pe care o vom considera de semn pozitiv;

– forța de frecare F_A (datorată rezistenței aerului) pe care o vom considera de semn negativ.



$$F_G = m \cdot g, \quad g = 9.8 \frac{m}{s^2}$$

$$F_A = -\gamma v \quad \gamma > 0 \text{ este coeficientul de frecare al aerului}$$

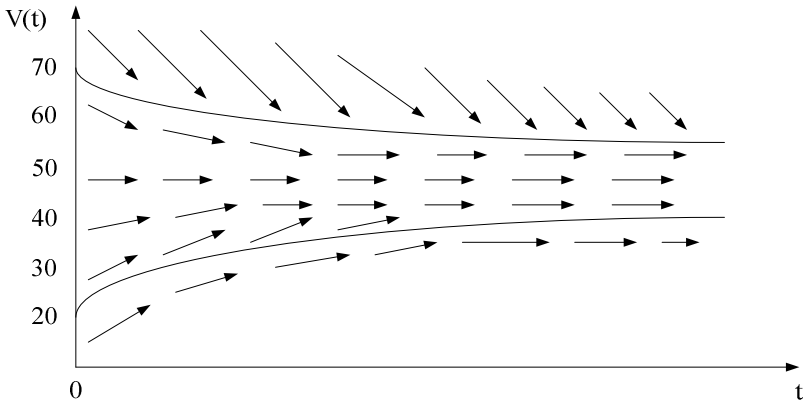
Ecuția (1.11) devine:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v \quad (1.12)$$

Soluția EDO de ordinul I (1.12) este viteza (în $\frac{m}{s}$) cu care cade obiectul. Considerăm cazul particular $\frac{\gamma}{m} = 0.196$.

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.196 v \quad (1.13)$$

În cazul ecuației (1.13), pentru $v = 50$ avem $v' = 0$ ($= 9.8 - 0.196 * 50$) deci tangenta la graficul soluției v este orizontală.



Pentru toate soluțiile lui (1.13) care trec prin puncte $v < 50$, panta tangentei la $v(t)$ este pozitivă (ex.: în cazul $v = 30$ panta este 3.92).

Pentru soluțiile (1.13) care trec prin puncte $v > 50$ panta tangentei este negativă (ex.: în cazul $v = 60$ panta este - 1.96).

Când $v < 50$, cu cât punctul inițial $(v, 0)$ se apropie prin creștere de 50 cu atât tangentele se apropie de zero.

Tangentele la graficul soluției ne permit să schițăm soluțiile ecuației (1.13) – vezi figura de mai sus. Uneori suntem mai puțin interesați de soluțiile curente și mai mult de comportamentul lor în timp.

Exemplul 3

Fie EDO

$$\frac{dx}{dt} + ax = 0, \quad (1.14)$$

unde $x = x(t)$ este o funcție reală necunoscută iar $\frac{dx}{dt}$ este derivata în raport cu timpul.

Soluția pentru (1.14) este funcția $x(t) = Ke^{-at}$.

Demonstrație Prin separarea necunoscutelor în (1.14)

avem $\frac{dx}{x} = -a \cdot dt$. Prin integrare avem

$$\ln x = -at + C, \quad e^{\ln x} = e^{-at} \cdot e^C = K \cdot e^{-at} \text{ sau } x(t) = K \cdot e^{-at}.$$

Observație Nu există o altă soluție pentru (1.14).

Demonstrație Presupunem că există $u(t)$ o altă soluție pentru (1.14). Considerăm produsul $u(t) \cdot e^{at}$ și derivăm în raport cu t ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [u(t) \cdot e^{at}] &= u'(t)e^{at} + u(t) \cdot a \cdot e^{at} = e^{at} (u'(t) + u(t) \cdot a) \\ &= e^{at} (-a \cdot u(t) + a \cdot u(t)) = 0. \end{aligned}$$

Deci $u(t) \cdot e^{at} = ct = K$ sau $u(t) = K \cdot e^{-at}$.

Constanta K este determinată dacă se precizează condiția inițială $x(t) = x_0$. Atunci K satisface $K \cdot e^{-at} = x_0$.

Coeficientul a din (1.14) poate fi considerat ca un parametru ale cărui valori au implicații calitative asupra soluției.

Pentru $a < 0$ avem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k \cdot e^{-at} = \begin{cases} \infty, & K > 0 \\ -\infty, & K < 0 \end{cases}$$

Pentru $a = 0$ avem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k \cdot e^{-at} = k \text{ const.}$$

Pentru $a > 0$ avem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k \cdot e^{-at} = 0.$$

Soluția ecuației (1.14) este *stabilă* dacă $a \neq 0$. În acest caz dacă înlocuim pe a cu o valoare b care are proprietatea $|b - a| < |a|$ atunci b are același semn cu a iar soluția va avea același comportament.

Dacă $a = 0$ atunci o schimbare în valoare va conduce la $a \neq 0$ și, evident, o schimbare radicală în comportamentul soluției. Vom spune că $a = 0$ este *un punct de bifurcație* pentru familia de parametri a ai ecuației (1.14).

2.1.3. Puncte de echilibru

Considerăm EDO autonomă (1.9). Punctul $x^* \in X$ pentru care avem

$$f(x^*) = 0 \quad (1.15)$$

se numește "*punct de echilibru*". Evident, $x = x^*$ este soluție pentru ecuația diferențială (1.9).

Punctul x^* se mai numește "*punct fix*", "*soluție echilibru*", "*punct staționar*", "*punct critic*". Noi vom folosi termenii "*punct de echilibru*" sau "*punct fix*".

Punctele de echilibru pot fi clasificate în funcție de comportamentul soluției în vecinătate lor. Mai precis, un punct material care se mișcă pe curba soluție se va apropia de punctul de echilibru sau se va depărta de acesta ?

După clasificarea punctelor de echilibru se poate face o apreciere asupra comportamentului celorlalte soluții ale ecuației diferențiale în funcție de poziția punctului inițial.

Exemplul 1

Fie ecuația logistică (model pentru creșterea populației)

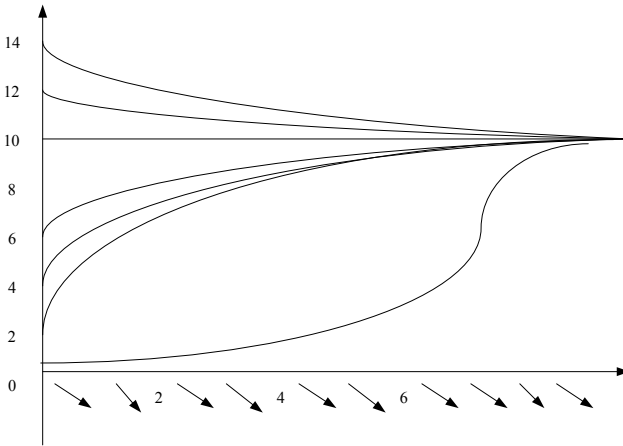
$$p' = r \left(1 - \frac{p}{K}\right) p \quad \Rightarrow \quad p' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{10}\right) p$$

Luăm $r = \frac{1}{2}$ și $K \neq 0$.

Punctele de echilibru sunt $p = 10$, $p = 0$. Avem 3 regiuni

$$-\infty < p < 0, \quad 0 < p < 10, \quad 10 < p < \infty$$

Soluțiile al căror punct inițial este în vecinătatea lui $p = 10$ se apropie de $p = 10$ când $t \rightarrow \infty$. Soluțiile al căror punct inițial este în vecinătatea lui $p = 0$ se depărtează de acesta când $t \rightarrow \infty$.



2.1.4. Dependența de condițiile inițiale

Considerăm funcția f din (1.4) și intervalul de timp $|t - t_0| \leq a$. Fie $x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Spunem că f satisface *condiția Lipschitz* în raport cu x dacă în $[t_0 - a, t_0 + a] \times D$ avem

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

unde $x_1, x_2 \in D$ iar L este o constantă numită *constantă Lipschitz*. Despre f mai spunem că este *Lipschitz continuă*.

Teorema (Dependența de condițiile inițiale)

Fie ecuația (1.4) unde f este continuă în x și t și Lipschitz continuă (cu constanta L). Considerăm

condiția inițială $x(0) = a$ și soluția $x_0(t)$ în intervalul I

și

condiția inițială $x(0) = a + \eta$ și soluția $x_\varepsilon(t)$ în intervalul I .

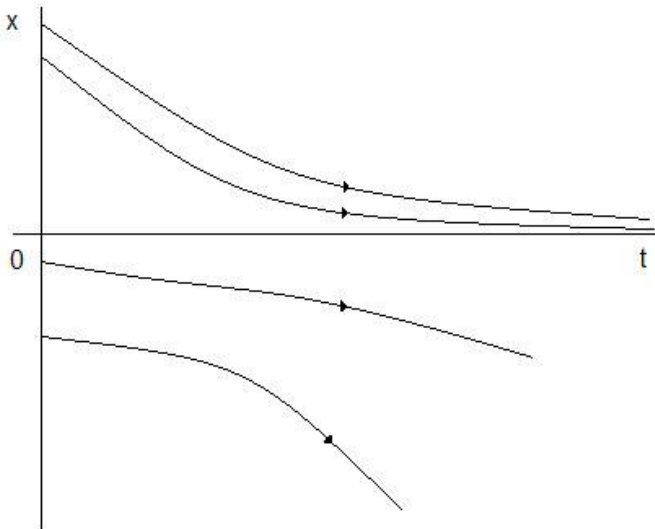
Dacă $|\eta| < \varepsilon$, ε pozitiv real, atunci

$$|x_0(t) - x_\varepsilon(t)| < \varepsilon e^{Lt}$$

în intervalul I .

Exemplu

Fie $\dot{x} = -x^2$, $t \geq 0$ care are punctul de echilibru $x = 0$. Soluțiile care au ca punct inițial $x_0 \neq 0$ la timpul $t = 0$, arată un comportament calitativ și cantitativ diferit pentru $x_0 = -\eta < 0$, respectiv $x_0 = \eta > 0$. Acesta este clar din soluția $x(t) = (x_0^{-1} + t)^{-1}$, $x_0 \neq 0$. Dacă $x_0 < 0$ soluțiile devin nemărginite într-un interval de timp finit.



În continuare vom studia rezolvarea EDO liniare de forma

$$\begin{aligned} & a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots \\ & + a_1(t) \cdot x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t) \end{aligned} \quad (1.16)$$

unde $x(t)$ este o funcție reală de variabila independentă t . De notat că în forma (1.16) nu întâlnim produse în $x(t)$ și derivate ale ei, iar puterea lui $x(t)$ și a derivatelor este doar unu.

Coeficienții $a_i(t)$, $i = \overline{0, n}$ și $g(t)$ sunt funcții de t . Se pot întâlni funcții nule sau nu, funcții liniare sau neliniare. Doar funcția necunoscută $x(t)$ și derivatele ei arată că o ecuație este sau nu liniară.

Vom studia și rezolvarea sistemelor de EDO liniare de ordinul I date de (1.10).

În ambele situații ne vom ocupa de cazurile particulare $n = 1$ și $n = 2$.

2.2. REZOLVAREA EDO LINIARE

Considerăm EDO liniare,

$$\dot{x} = A \cdot x + C, x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

unde $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este un operator în \mathbb{R}^n iar $C \in \mathbb{R}^n$ un vector din \mathbb{R}^n .

Fie cazul autonom omogen,

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

și condiția inițială $x(0) = x_0, x \in \mathbb{R}^n$.

Soluția unică a ecuației (2.2) este

$$x(t) = e^{tA} \cdot x_0 \quad (2.3)$$

unde prin e^A am notat exponențiala matricei A .

Definiția 2.1. Fie A o matrice $n \times n$ cu coeficienți constanți. Atunci exponențiala lui A , notată e^A , se definește prin seria de puteri

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Lăsăm ca temă demonstrația faptului că (2.3) este unica soluție pentru ecuația (2.2).

Soluția (2.3) ne permite să rezolvăm ecuații liniare neautonome și neomogene de forma,

$$\dot{x} = Ax + g(t), x \in \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

Sisteme Dinamice

unde $A_{n \times n}$ este o matrice cu coeficienți constanți iar $g = g(t) \in \mathbb{R}^n$ pentru $t \in \mathbb{R}^n$.

Considerăm condiția inițială

$$x(0) = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (2.5)$$

Pentru a găsi soluția problemei (2.4) + (2.5) notăm

$$y(t) = e^{-tA} \cdot x(t) \quad \text{și} \quad y(0) = x(0) = x_0$$

$$\dot{y} = e^{-tA} \cdot \dot{x} - A e^{-tA} x = e^{-tA} g(t)$$

Integrând avem:

$$\int_0^t y'(s) ds = \int_0^t e^{-sA} g(s) ds$$

$$y(t) - y(0) = \int_0^t e^{-sA} g(s) ds$$

$$e^{-tA} x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-sA} g(s) ds$$

Obținem

$$x(t) = e^{tA} x_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} g(s) ds \quad (2.6)$$

soluție pentru problema (2.4) + (2.5).

Ecuția (2.2) este un caz particular pentru ecuația liniară neautonomă și omogenă,

$$\dot{x} = A(t) \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.7)$$

O proprietate a EDO liniare este "principiul superpoziției".

Dacă pentru o EDO liniară în \mathbb{R}^n putem găsi n soluții $x_1(t), \dots, x_n(t)$ independente, atunci orice altă soluție poate fi scrisă ca o combinație liniară de x_1, \dots, x_n . Mai precis, o altă soluție este

$$x(t) = \Phi(t) \cdot C \quad (2.8)$$

unde $C \in \mathbb{R}^n$ este un vector constant iar $\Phi(t)$ este o matrice $n \times n$ ale cărei coloane sunt soluțiile $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$

$$\Phi(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]. \quad (2.9)$$

$\Phi(t)$ se numește *matricea fundamentală* pentru problema (2.2). Din condiția inițială $x(0) = x_0 = \Phi(0) \cdot C$ deducem că soluția pentru (2.2) se scrie și

$$x(t) = \Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1} \cdot x_0 \quad (2.10)$$

Comparând (2.10) cu (2.3) deducem că

$$e^{tA} = \Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1}.$$

Matricea fundamentală va fi utilă în studiul problemei (2.7) unde A are coeficienți periodici, i.e

$$A(t) = A(t + T), \quad T > 0$$

2.2.1 Rezolvarea EDO liniare de ordinal I în \mathbb{R}

Considerăm cazul autonom omogen

$$\dot{x} + ax = 0 \quad (2.11)$$

Sisteme Dinamice

Din paragraful 2.1 știm că soluția pentru (2.11) este $x(t) = K \cdot e^{-at}$ (caz particular pentru soluția (2.3)) unde K se poate afla din condiția inițială

$$x(0) = x_0 \quad (2.12)$$

Soluția problemei (2.11)+(2.12) este $x(t) = x_0 \cdot e^{-at}$.

Considerăm cazul autonom neomogen.

Fie ecuația

$$\dot{x} + ax = b \quad (2.13)$$

și condiția $x(0) = x_0$

Soluția (2.13) este

$$x(t) = K \cdot e^{-at} + b/a \quad (2.14)$$

pentru $a \neq 0$ și

$$x(t) = b \cdot t + x_0 \quad (2.15)$$

pentru $a = 0$.

În (2.14) K este o constantă ce se determină din $K = x_0 - b/a$.

Soluția (2.14) are două părți:

$$x_c(t) = ke^{-at}, \text{ "soluția complementară"}$$

și

$$x_p(t) = \frac{b}{a} \text{ "echilibrul"}$$

obținut din (2.13) punând $\dot{x} = 0$.

Observăm că $x_c(t)$ și $x_p(t)$ sunt ambele soluții pentru (2.13). Conform principiului superpoziției suma lor

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

este și ea soluție pentru (2.13).

Punctul de echilibru x_p se mai numește și "punct fix".

Soluția pentru problema (2.13) + (2.12) este:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-a \cdot t} + \frac{b}{a} \quad (2.16)$$

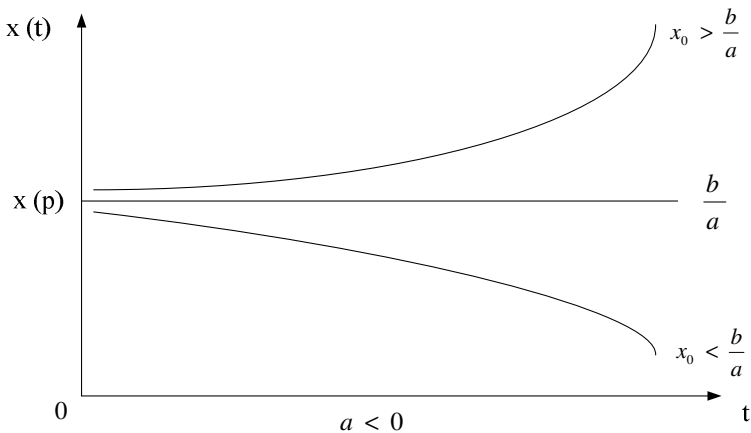
Studiem comportamentul soluției (2.16).

Pentru $a < 0$ avem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left((x_0 - b/a) \cdot e^{-a \cdot t} + b/a \right) = \infty \quad \text{pentru} \quad x_0 > \frac{b}{a}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\infty \quad \text{pentru} \quad x_0 < \frac{b}{a}$$

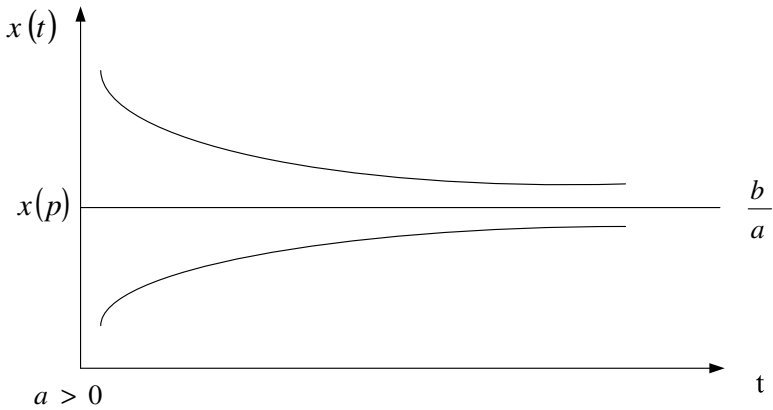
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{b}{a} \quad \text{pentru} \quad x_0 = \frac{b}{a}$$



Sisteme Dinamice

Pentru $a > 0$ avem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left((x_0 - b/a) \cdot e^{-at} + b/a \right) = b/a \quad \text{pentru } x_0 < \frac{b}{a} \text{ și } x_0 > \frac{b}{a}.$$



În cazul $a < 0$ punctul de echilibru este "*instabil*" iar în cazul $a > 0$ punctul de echilibru este "*asimptotic stabil*".

Exemplu $\dot{x} + 2x = 10$, $x(0) = x_0 = 8$

$$x(t) = \left(8 - \frac{10}{2} \right) e^{-2t} + \frac{10}{2} = 3e^{-2t} + 5$$

Considerăm cazul neautonom omogen

$$\dot{x} + a(t)x = 0 \tag{2.17}$$

cu condiția

$$x(0) = x_0. \quad (2.18)$$

Soluția pentru (2.17) este

$$x(t) = K \cdot e^{-\int a(t) dt} \quad (2.19)$$

unde K este o constantă ce se determină din condiția (2.18).

Exemplu

$$\dot{x} + 2tx = 0, \quad x(0) = x_0$$

Soluția este $x(t) = K \cdot e^{-\int 2t dt} = K \cdot e^{-t^2}$, $x(0) = x_0 = K$
 $\Rightarrow x(t) = x_0 \cdot e^{-2t^2}$.

Considerăm cazul neautonom neomogen

$$\dot{x} + a(t)x = g(t) \quad (2.20)$$

cu condiția (2.18).

Soluția pentru (2.20) este

$$x(t) = e^{-\int a(t) dt} \cdot \left(K + \int g(t) \cdot e^{\int a(t) dt} dt \right) \quad (2.21)$$

unde K este o constantă ce se determină din condiția (2.18).

Exemplu

$$\dot{x} + \frac{2}{t}x = 5t^2, \quad x(1) = x_0$$

$$e^{\int a(t) dt} = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \int \frac{1}{t} dt} = e^{2 \ln |t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

$$e^{-\int a(t)dt} = e^{-\int \frac{2}{t} dt} = \frac{1}{e^{\int \frac{2}{t} dt}} = \frac{1}{t^2}$$

$$x(t) = \frac{1}{t^2} \left[K + \int 5t^2 \cdot t^2 dt \right] = \frac{1}{t^2} \left[K + \int t^4 dt \right] = \frac{1}{t^2} \left[K + t^5 \right]$$

$$x(1) = x_0 = \frac{K}{1^2} + 1^3 \Rightarrow x_0 = K + 1 \Rightarrow K = x_0 - 1$$

În continuare prezentăm alte metode de rezolvare a EDO liniare de ordinul I care se aplică unor forme particulare de EDO:

- metoda factorului integrant;
- EDO separabile.

Rezolvarea EDO liniare de ordinul I prin metoda factorului integrant

Fie o EDO liniară de ordinul I sub forma

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = g(t) \tag{2.22}$$

unde $p(t)$ și $g(t)$ sunt funcții continue. Considerăm că există o funcție $\mu(t)$ numită *factor de integrare* și multiplicăm (2.22) cu $\mu(t)$:

$$\mu(t) \frac{dx}{dt} + \mu(t)p(t) \cdot x = \mu(t) \cdot g(t) \tag{2.23}$$

Mai considerăm că $\mu(t)$ satisface:

$$\mu(t) \cdot p(t) = \mu'(t) \tag{2.24}$$

Atunci, (2.23) devine

$$\mu(t) \frac{dx}{dt} + \mu'(t) \cdot x = \mu(t) \cdot g(t) \quad (2.25)$$

Dar membrul stâng este $(\mu(t) \cdot x(t))$ și atunci (2.25) devine:

$$(\mu(t) \cdot x(t))' = \mu(t) \cdot g(t) \quad (2.26)$$

Întegrând (2.26) avem:

$$\int (\mu(t) x(t))' dt = \int \mu(t) g(t) dt \quad ;$$

$$\mu(t) x(t) + c = \int \mu(t) g(t) dt \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{\int \mu(t) g(t) dt + c}{\mu(t)} \quad (2.27)$$

Rămâne să determinăm pe $\mu(t)$. Din (2.24) rezultă

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t) \Leftrightarrow (\ln \mu(t))' = p(t) \Rightarrow (\text{integrare})$$

$$\ln \mu(t) + K = \int p(t) dt \Leftrightarrow \ln \mu(t) = \int p(t) dt + K \Rightarrow$$

(exponențiere)

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt + K} = e^K \cdot e^{\int p(t) dt} = K \cdot e^{\int p(t) dt} \quad (2.28)$$

Observație Se poate renunța la K prin împărțire și considerând $C \equiv \frac{C}{K}$.

Soluția EDO liniară de ordinul I este (2.27) unde $\mu(t)$ satisface (2.28).

Algoritm

1. Pune ecuația diferențială în forma (2.22).
2. Găsește factorul de integrare cu formula (2.28).

3. Multiplică în ecuația diferențială sub forma (2.22) ambii membri ai egalității cu $\mu(t)$ și verifică membrul stâng să fie de forma $(\mu(t)x(t))$.

4. Integrează ambii membri.

5. Soluția este conform (2.27) și (2.28).

Exemplul 1.

$$ty' + 2y = t^2 - t + 1 \quad ; \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow : t$$

$$y' + \frac{2}{t}y = t - 1 + \frac{1}{t}$$

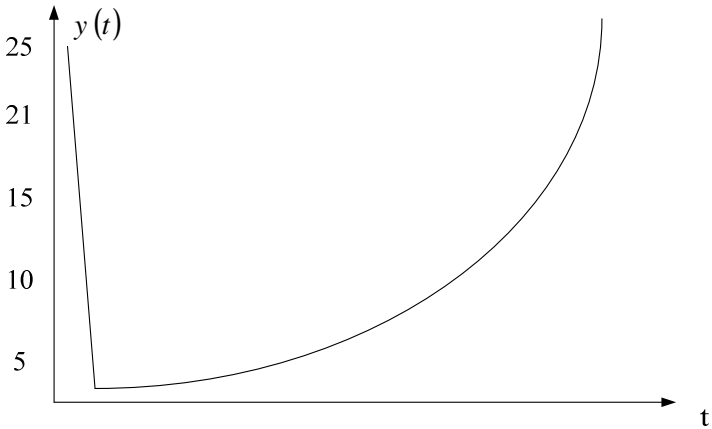
$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \int \frac{dt}{t}} = e^{2 \ln|t|} = e^{\ln|t|^2} = e^{\ln t^2} = t^2$$

$$t^2 \dot{y} + 2ty = t^3 - t^2 + t \Leftrightarrow (t^2 y)' = t^3 - t^2 + t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 y = \int (t^3 - t^2 + t) dt = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$y(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} + \frac{C}{t^2} \quad \text{\textit{și}} \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Atunci } y(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} + \frac{1}{12t^2}$$



Exemplul 2.

$$ty' - 2y = t^5 \sin(2t) - t^3 + 4t^4, \quad y(\pi) = \frac{3}{2}\pi^4$$

$$\Downarrow : t$$

$$y' - \frac{2}{t}y = t^4 \sin(2t) - t^2 + 4t^3$$

$\mu(t) = e^{\int -\frac{2}{t} dt} = e^{-2 \ln|t|} = e^{\ln t^{-2}} = t^{-2}$. Înmulțim ecuația cu $\mu(t)$.

$$\left(t^{-2}y' - \frac{2}{t}y \right) = (t^{-2}y)' = t^2 \sin(2t) - 1 + 4t$$

$$t^{-2}y(t) = \int t^2 \sin(2t) dt + \int (-1) dt + 4 \int t dt$$

$$t^{-2}y(t) = -\frac{1}{2}t^2 \cos(2t) + \frac{1}{2}t \sin(2t) + \frac{1}{4} \cos(2t) - t + 2t^2 + c$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}t^4 \cos(2t) + \frac{1}{2}t^3 \sin(2t) + \frac{1}{4}t^2 \cos(2t) - t^3 + 2t^4 + ct^2$$

$$\text{Din } y(\pi) = \frac{3}{2}\pi^4 \Rightarrow c = \pi - \frac{1}{4}.$$

Exemplul 3.

$$2y' - y = 4 \sin(3t) \quad , \quad y(0) = y_0$$

$$y' - \frac{1}{2}y = 2 \sin(3t)$$

$$\mu(t) = e^{\int -\frac{1}{2}dt} = e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow e^{-\frac{t}{2}}y' - \frac{1}{2}y = 2e^{-\frac{t}{2}} \sin(3t)$$

$$\left(e^{-\frac{t}{2}}y \right)' = 2e^{-\frac{t}{2}} \sin(3t) \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}}y = \int 2e^{-\frac{t}{2}} \sin(3t) dt + c$$

$$e^{-\frac{t}{2}}y = -\frac{24}{37}e^{-\frac{t}{2}} \cos(3t) - \frac{4}{37}e^{-\frac{t}{2}} \sin(3t) + c$$

$$y(t) = -\frac{24}{37} \cos(3t) - \frac{4}{37} \sin(3t) + ce^{\frac{t}{2}}$$

EDO liniare ordinul 1 – Ecuații diferențiale separabile

Forma generală este:

$$N(y) \frac{dy}{dx} = M(x) \tag{2.29}$$

$$N(y) dy = M(x) dx$$

$$\int N(y) dy = \int M(x) dx \tag{2.30}$$

Exemplul 1

$$\frac{dy}{dx} = 6y^2x, \quad y(1) = \frac{1}{25}$$

$$y^{-2}dy = 6x dx; \quad \int y^{-2}dy = \int 6x dx; \quad -\frac{1}{y} = 3x^2 + c$$

$$-\frac{1}{\frac{1}{25}} = 3(1)^2 + c \Rightarrow c = -28$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = 3x^2 - 28, \quad y(x) = \frac{1}{28 - 3x^2}$$

$$28 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{28}{3}} \approx \pm 3.05505 \Rightarrow \text{intervale}$$

de validitate

$$-\infty < x < -\sqrt{\frac{28}{3}}, \quad -\sqrt{\frac{28}{3}} < x < \sqrt{\frac{28}{3}}, \quad \sqrt{\frac{28}{3}} < x < \infty$$

Din $y(1) = \frac{1}{25} \Rightarrow -\sqrt{\frac{28}{3}} < x < \sqrt{\frac{28}{3}}$ este intervalul de validitate pentru soluție.

Exemplul 2

$$y' = \frac{3x^2 + 4x - 4}{2y - 4}, \quad y(1) = 3$$

$$(2y - 4)dy = (3x^2 + 4x - 4)dx \quad \Rightarrow$$

$$\int (2y - 4)dy = \int (3x^2 + 4x - 4)dx$$

$$y^2 - 4y = x^3 + 2x^2 - 4x + c$$

$$\text{Din } y(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad c = -2$$

$$\text{Deci } y^2 - 4y - (x^3 + 2x^2 - 4x - 2) = 0$$

Soluția

este

$$y(x) = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-(x^3 + 2x^2 - 4x - 2))}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4(x^3 + 2x^2 - 4x - 2)}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x + 2}$$

Din $y(1) = 3$ avem $3 = y(1) = 2 \pm \sqrt{1+2-4+2} = 2 \pm 1$.

\Rightarrow doar soluția cu plus ("+") este bună.

Intervalul de validitate este de

$x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \geq 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \geq 0$ pentru $x = -3.36523$ și două rădăcini complexe.

Exemplul 3

$$y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, \quad y(0) = -1$$

$$y^3 dy = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx, \quad \int y^{-3} dy = \int x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + c \\ y(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow c = -\frac{3}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3 - 2\sqrt{1+x^2}}$$

$$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}$$

Din condițiile inițiale rezultă $y(x) = -\frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}$.

Intervalul de validitate este dat de

$$3 - 2\sqrt{1+x^2} > 0 \Rightarrow \frac{5}{4} > x^2 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Exemplul 4

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta}, \quad r(1) = 2$$

$$\int \frac{1}{r^2} dr = \int \frac{1}{\theta} d\theta, \quad -\frac{1}{r} = \ln|\theta| + c$$

$$-\frac{1}{2} = \ln(1) + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{r} = \ln|\theta| - \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln|\theta|}$$

$$\frac{1}{2} - \ln|\theta| = 0 \Rightarrow \ln|\theta| = \frac{1}{2}, \quad |\theta| = e^{\frac{1}{2}}, \quad \theta = \pm \sqrt{e}$$

Patru intervale de validitate posibile:

$$-\infty < \theta < -\sqrt{e}$$

$$-\sqrt{e} < \theta < 0$$

$$0 < \theta < \sqrt{e}$$

$$\sqrt{e} < \theta < \infty$$

Dar pentru condițiile inițiale trebuie $\theta = 1$. Rezultă $0 < \theta < \sqrt{e}$.

Exemplul 5

$$\frac{dy}{dt} = e^{y-t} \sec(y) (1+t^2), \quad y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = e^y \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{\cos(y)} (1+t^2)$$

$$e^{-y} \cos(y) dy = e^{-t} (1+t^2) dt$$

$$\int e^{-y} \cos(y) dy = \int e^{-t} (1+t^2) dt$$

$$\frac{e^{-y}}{2} (\sin(y) - \cos(y)) = -e^{-t} (t^2 + 2t + 3) + c$$

$$\text{Din } y(0) = 0 \Rightarrow c = \frac{5}{2}.$$

Rămâne în forma implicită.

2.2.2 Rezolvarea EDO liniare de ordinal II în R

Considerăm forma generală

$$a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = g(t)$$

unde necunoscuta este $x = x(t)$, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Fără a pierde generalitatea, împărțim cu $a(t) \neq 0$ și avem

$$\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = g(t) \tag{3.1}$$

În (3.1) am notat $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Definim operatorii diferențiali $D^i(x) = \frac{d^i x}{dt^i}$, $i = 1, 2$.

Atunci ecuația (3.1) se scrie

$$[D^2 + b(t)D + c(t)]x(t) = g(t) \tag{3.2}$$

sau

$$L(D)x(t) = g(t) \quad (3.3)$$

Ecuatia (3.1) este *neomogenă* dacă $g(t) \neq 0$ și *omogenă* dacă $g(t) = 0$.

Ecuatia (3.1) este *neautonomă* când coeficienții sunt funcții de t și *autonomă* când aceștia nu depind de t , i.e.

$$b(t) = b, \quad c(t) = c, \quad g(t) = g,$$

unde b, c, g sunt constante reale.

Observație Fie două funcții $f_1(t)$ și $f_2(t)$ derivabile.

Numim *Wronskianul* funcțiilor f_1 și f_2 mărimea

$$W(f_1, f_2)(t) = \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Funcțiile f_1 și f_2 sunt *liniar independente* dacă $W(f_1, f_2)(t) \neq 0$ pentru orice t .

Atunci, soluțiile ecuației (3.1), $x_1(t)$ și $x_2(t)$ sunt *liniar independente* dacă Wronskianul lor,

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \text{ este diferit de zero, } W(t) \neq 0,$$

$\forall t \in \mathbb{R}$.

Pentru ecuația (3.3), soluția din cazul omogen (i.e. $g(t) = 0$) este *soluția complementară*. O notăm cu $x_c(t)$.

Soluția ecuației (3.3) din cazul neomogen (i.e. $g(t) \neq 0$) este *soluția particulară*. O notăm cu $x_p(t)$.

Conform principiului superpoziției

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \quad (3.4)$$

este soluție pentru (3.1).

Cazul autonom omogen

În acest caz ecuația (3.1) se scrie

$$\ddot{x} + b\dot{x} + c = 0 \quad (3.5)$$

sau

$$L(D)x(t) = 0 \quad (3.6)$$

Acestei ecuații îi asociem ecuația caracteristică

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (3.7)$$

Fie λ_1 și λ_2 rădăcinile ecuației (3.7).

Teorem 2.2. *EDO liniară (3.5) are soluția*

$$(i) \quad x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

dacă λ_1 și λ_2 sunt reale și distincte

$$(ii) \quad x(t) = e^{\lambda t} (A_1 + t A_2)$$

dacă λ_1 și λ_2 sunt reale și egale, i.e. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$(iii) \quad x(t) = e^{\lambda t} \cdot (B_1 \cos \beta t + B_2 \sin \beta t)$$

dacă λ_1 și λ_2 sunt

numere complexe conjugate,

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

A_1, A_2, B_1, B_2 sunt constante care se determină din condițiile inițiale.

Exemple pentru cele 3 cazuri ale teoremei 2.2.

Exemplul 1

$$\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 0$$

Ecuția caracteristică $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ are rădăcinile $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$.

Soluția este $x(t) = A_1 e^{2t} + A_2 e^{-3t}$.

Exemplul 2

$$2\ddot{x} + \dot{x} - x = 0, \quad x(0) = 3, \quad \dot{x}(0) = 2$$

Ecuția caracteristică $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ are rădăcinile $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -1$.

$$x(t) = A_1 e^{\frac{1}{2}t} + A_2 e^{-t}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2} A_1 e^{\frac{1}{2}t} - A_2 e^{-t}$$

$$x(0) = A_1 + A_2 = 3$$

$$\dot{x}(0) = \frac{1}{2} A_1 - A_2 = 2$$

$$\frac{3}{2} A_1 = 5 \Rightarrow A_1 = \frac{10}{3}, \quad A_2 = -\frac{1}{3}$$

Deci $x(t) = \frac{10}{3}e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{3}e^{-t}$ este soluția din acest caz.

Exemplul 3

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3$$

Soluția generală este $x(t) = (A_1 + t A_2)e^{3t}$

Exemplul 4

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 0, \quad x(0) = 5, \quad \dot{x}(0) = 4$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 3i$$

$$x(t) = e^{-t}(B_1 \cos 3t + B_2 \sin 3t)$$

$$\dot{x}(t) = -B_1 e^{-t} + e^{-t}(-3B_1 \sin 3t + 3B_2 \cos 3t)$$

$$x(0) = B_1 = 5 \qquad B_1 = 5$$

$$\dot{x}(0) = -5 + 3B_2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad B_2 = 3$$

$$x(t) = e^{-t}(5 \cos 3t + 3 \sin 3t).$$

Cazul neautonom și neomogen - Rezolvare cu metoda operatorului invers

Vom considera EDO liniară de ordinul II sub forma

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = g(t) \qquad (3.8)$$

unde coeficienții necunoscutei și ai derivatelor sunt încă valori constante.

Conform (3.2) operatorul diferențial este

$$L(D)x = (D^2 + bD + c)x$$

iar ecuația (3.8) se scrie simbolic

$$L(D)x(t) = g(t) \quad (3.9)$$

Soluția particulară poate fi găsită prin

$$x_p(t) = \frac{1}{L(D)} g(t) \quad (3.10)$$

unde $\frac{1}{L(D)}$ este operatorul diferențial invers și poate fi interpretat ca o integrare, i.e.

$$\frac{1}{L(D)} g(t) = \int g(t) dt$$

Observație Fie EDO liniară de ordinul I.

$$\dot{x} + ax = g(t) \quad (3.11)$$

sau

$$(D + a)x(t) = g(t)$$

Soluția particulară pentru (3.11) este

$$x_p(t) = \frac{1}{D + a} g(t).$$

Dar, conform paragrafului precedent, soluția generală a ecuației (3.11) este

$$x(t) = Ae^{-at} + e^{-at} \cdot \int e^{at} g(t) dt = x_c(t) + x_p(t).$$

Deci

$$x_p(t) = \frac{1}{D+a} g(t) = e^{-at} \int e^{at} g(t) dt \quad (3.12)$$

Revenim la cazul EDO liniare de ordinul II date de ecuațiile (3.8) sau (3.9).

Vom considera cazul în care ecuația caracteristică asociată,

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

are rădăcini reale și distincte, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Operatorul diferențial poate fi rescris

$$L(D)x = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)x$$

Ecuația (3.9) devine

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)x(t) = g(t) \quad (3.13)$$

Soluția particulară $x_p(t)$ pentru ecuația (3.8) poate fi găsită integrând de două ori ecuația (3.13).

Realizăm o primă integrare corespunzător lui $D - \lambda_1$.

$$(D - \lambda_2)x_p^{(t)} = \frac{1}{D - \lambda_1} g(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot \int e^{-\lambda_1 t} \cdot g(t) dt$$

După a doua integrare, avem

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{D - \lambda_2} \left(e^{\lambda_1 t} \cdot \int e^{-\lambda_1 t} \cdot g(t) dt \right) = \\ &= e^{\lambda_2 t} \cdot \int e^{-\lambda_2 t} \cdot \left[e^{\lambda_1 t} \cdot \int e^{-\lambda_1 t} g(t) dt \right] dt = \\ &= e^{\lambda_2 t} \cdot \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \cdot \left[\int e^{-\lambda_1 t} \cdot g(t) dt \right] dt. \end{aligned}$$

Exemplu

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = e^t$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

$$\begin{aligned} x_p(t) &= e^{2t} \cdot \left(\int e^{(3-2)t} \cdot \left(\int e^{-3t} \cdot e^t dt \right) dt \right) = e^{2t} \cdot \left(\int e^t \cdot \int e^{-2t} dt \right) dt = \\ &= e^{2t} \cdot \int e^t \left(\frac{-1}{2} \right) e^{-2t} dt = \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot e^{2t} \cdot \int e^{-t} dt = \\ &= \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot e^{2t} \cdot (-1) \cdot e^{-t} = \frac{1}{2} e^t \end{aligned}$$

Soluția completă este:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = A_1 e^{2t} + A_2 e^{3t} + \frac{1}{2} e^t$$

Reguli pentru stabilirea operatorului invers

Expresie operator	Valoare	x_p
1. $\frac{1}{(D - \alpha)^m} e^{at}$	$\frac{t^m e^{at}}{m!}$	$m = 1, 2, \dots$
2. $\frac{1}{D^2 + \alpha^2} \sin bt$	$\frac{\sin bt}{a^2 - b^2}$	$a \neq b$
3. $\frac{1}{L(D)} e^{at}$	$\frac{e^{at}}{L(\alpha)}$	$L(\alpha) \neq 0$

Aceași metodă aplicată în cazul autonom neomogen, $g(t) = g$ constant.

Ecuția este în acest caz

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = g \quad (3.14)$$

sau, sub formă simbolică

$$L(D)x(t) = g \quad (3.15)$$

unde

$$L(D)x = (D^2 + bD + c)x$$

Soluția particulară se obține prin aplicarea operatorului invers

$$x_p(t) = \frac{1}{L(D)}g(t)$$

Vom considera din nou cazul rădăcinilor reale și distincte pentru ecuația caracteristică $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Fie acestea λ_1 și λ_2 .

Ecuația (3.15) se scrie $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)x(t) = g$.

Integrăm corespunzător lui $D - \lambda_1$. Avem:

$$(D - \lambda_2)x_p^{(t)} = \frac{1}{D - \lambda_1}g^{(t)} = e^{\lambda_1 t} \int e^{-\lambda_1 t} \cdot g dt =$$

$$\left(-\frac{g}{\lambda_1} \right) e^{\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_1 t} = -\frac{g}{\lambda_1}.$$

Integrăm corespunzător lui $D - \lambda_2$. Avem,

$$x_p(t) = e^{\lambda_2 t} \cdot \int e^{-\lambda_2 t} \cdot \left(-\frac{g}{\lambda_1}\right) dt = \left(-\frac{g}{\lambda_1}\right) \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \int e^{-\lambda_2 t} dt =$$

$$\left(-\frac{g}{\lambda_1}\right) \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda_2}\right) e^{-\lambda_2 t} = \frac{g}{(\lambda_1 \cdot \lambda_2)} = \frac{g}{c}$$

deoarece $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = c$.

Soluția generală este $x(t) = x_c(t) + \frac{g}{c}$.

Condiții de stabilitate pentru soluția EDO liniară de ordin II

Ne vom referi la rezultatele teoremei din cazul autonom omogen.

În cazul (i) pentru $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ și în cazul (ii) pentru $\lambda < 0$ vom avea $x(t) \rightarrow 0$ când $t \rightarrow \infty$.

Tot în această situație, soluția în cazul autonom neomogen $x(t) \rightarrow \frac{g}{c}$ când $t \rightarrow \infty$.

În ambele cazuri *soluția este stabilă*. Spunem că este "asimptotic stabilă". Mai spunem că întreg sistemul este asimptotic stabil.

În cazul (iii), funcțiile $B_1 \cos \beta t$, $B_2 \sin \beta t$ sunt periodice cu frecvența $\frac{2\pi}{\beta}$ și amplitudinile B_1 și B_2 . Prin multiplicare cu $e^{\alpha t}$ oscilația este încetinită în timp dacă

$\alpha < 0$ și mărită dacă $\alpha > 0$. Condiția de stabilitate este $\alpha < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$, unde $\lambda = \alpha \pm i\beta$.

Dacă $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ sau $\lambda > 0$ pentru cazurile (i) și (ii) avem $x(t) \rightarrow \infty$ când $t \rightarrow \infty$. *Soluția este instabilă.*

Cazul neautonom și neomogen - Rezolvarea cu metoda coeficienților nedeterminați

Avantaje

- se reduce la o problemă de algebră;
- în general nu este necesar să se calculeze soluția complementară.

Dezavantaje

- este aplicabilă doar pentru anumite tipuri de funcții $g(t)$;
- este utilă doar pentru cazul coeficienților b, c constanți în ecuația (3.8).

Metoda caută o soluție $x_p(t)$ de o formă care să fie în concordanță cu termenul liber $g(t)$.

Cazul 1

$g(t)$ este exponențială.

$$g(t) = ae^{bt}$$

Se încearcă $y_p(t) = Ae^{bt}$.

Ex. $g(t) = 3e^{5t} \Rightarrow y_p(t) = Ae^{bt}$.

Cazul 2

$g(t)$ este trigonometrică – în principal sin sau cos.

Se încearcă $y_p(t) = A_1 \cos bt + A_2 \sin bt$ dacă $g(t) = \sin bt$ sau $g(t) = \cos bt$.

Cazul 3

$g(t)$ este un polinom în t .

Se încearcă $y_p(t)$ polinom în t de același grad ca $g(t)$.

În general se pot face alegerile

$g(t)$	$y_p(t)$
ae^{bt}	Ae^{bt}
$a \cos \beta t$	$A \cos \beta t + B \sin \beta t$
$a \cos \beta t + b \sin \beta t$	$A \cos \beta t + B \sin \beta t$
Polinom în t de gradul n	$A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0$

4. Iată câteva alegeri pentru soluția particulară în cazul când $g(t)$ este o expresie cu semne și produse de funcții de bază.

$$4.1. \quad g(t) = te^{4t} \Rightarrow y_p(t) = Ce^{4t}(At + B) \\ \approx e^{4t}(At + B)$$

$$4.2. \quad g(t) = ae^{\alpha t} \sin \beta t \Rightarrow y_p(t) = e^{\alpha t} [A \cos \beta t + B \sin \beta t]$$

$$4. 3. \quad g(t) = (9t^2 - 103t) \cos t \Rightarrow$$

$$y_p(t) = (At^2 + Bt + C)(D \cos t + E \sin t)$$

$$\approx (At^2 + Bt + C) \cos t + (At^2 + Bt + C) \sin t$$

$$4. 4. \quad g(t) = -e^{-2t} (3 - 5t) \cos(9t) \Rightarrow$$

$$y_p(t) = e^{-2t} (At + B) \cos(9t) + e^{-2t} (Ct + D) \sin(9t)$$

$$4. 5. \quad g(t) = 4 \cos 6t - 9 \sin 6t \Rightarrow$$

$$y_p(t) = A \cos 6t + B \sin 6t$$

$$4. 6. \quad g(t) = e^{7t} + 6 \Rightarrow y_p(t) = Ae^{7t} + B$$

$$4. 7. \quad g(t) = 6t^2 - 7 \sin 3t + 9 \Rightarrow$$

$$y_p(t) = At^2 + Bt + C + D \cos 3t + E \sin 3t$$

$$4. 8. \quad g(t) = 10e^t - 5te^{-8t} + 2e^{-8t} \Rightarrow$$

$$y_p(t) = Ae^t + (Bt + C) e^{-8t}$$

$$4. 9. \quad g(t) = t^2 \cos t - 5t \sin t \Rightarrow$$

$$y_p(t) = (At^2 + Bt + C) \cos t + (Dt^2 + Et + F) \sin t$$

Notă

Dacă în (3.8) avem $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$ atunci soluția particulară este $x_p(t) = x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)$ unde x_{p_1} și x_{p_2} sunt soluțiile lui (3.8) în care înlocuim $g(t)$ pe rând cu $g_1(t)$ și respectiv $g_2(t)$.

EDO liniare omogene de ordinul II cu coeficienți neconstanți

Este cazul ecuațiilor de forma

$$\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t) = 0 \quad (3.16)$$

cu condiția inițială

$$x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = x'_0 \quad (3.17)$$

unde în (3.16) coeficienții $b(t)$ și $c(t)$ depind explicit de t .

Fie două soluții $x_1(t)$ și $x_2(t)$ pentru (3.16)+(3.17), liniar independente.

Conform principiului superpoziției, soluția generală pentru (3.16) este

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \quad (3.18)$$

și ea trebuie să satisfacă (3.17), i.e.

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0) = c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) \\ x'_0 = \dot{x}(t_0) = c_1\dot{x}_1(t_0) + c_2\dot{x}_2(t_0) \end{cases} \quad (3.19)$$

Soluțiile sistemului (3.19) sunt:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & x_2(t_0) \\ x'_0 & \dot{x}_2(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ \dot{x}_1(t_0) & \dot{x}_2(t_0) \end{vmatrix}}, c_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_0 \\ x'_1 & x'_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ \dot{x}_1(t_0) & \dot{x}_2(t_0) \end{vmatrix}} \quad (3.20)$$

sau folosind Wronskianul soluțiilor x_1, x_2 ,

$$W(x_1, x_2)(t) \underline{\underline{not}} W(t)$$

avem

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & x_2(t_0) \\ x_0' & x_2'(t_0) \end{vmatrix}}{W(t_0)}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_0 \\ x_1'(t_0) & x_0' \end{vmatrix}}{W(t_0)} \quad (3.21)$$

Teorema 2.3 (Abel)

Fie $x_1(t)$, $x_2(t)$ două soluții pentru (3.16)+(3.17).

Atunci Wronskianul celor două soluții este

$$W(x_1, x_2)(t) = W(x_1, x_2)(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^t b(s) ds} \quad (3.22)$$

Observație Dacă absorbim $W(x_1, x_2)(t_0)$ și evaluarea integralei din (3.22) în punctul t_0 , într-o singură constantă atunci

$$W(x_1, x_2)(t) = c \cdot e^{\int_{t_0}^t b(s) ds} \quad (3.23)$$

Exemple pentru EDO liniare autonome omogene de ordin II

1. Ecuația caracteristică are rădăcini reale și distincte.

$$\ddot{x} + 4\dot{x} - 5x = 0, \quad x(e) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1$$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = 1$$

$$x(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 e^t \Rightarrow \dot{x}(t) = -5c_1 e^{-5t} + c_2 e^t$$

$$x(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

$$\dot{x}(0) = -5c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow -5c_1 - c_1 = 1 \Rightarrow 6c_1 = -1;$$

$$c_1 = -\frac{1}{6}; c_2 = \frac{1}{6}$$

$$x(t) = -\frac{1}{6}e^{-5t} + \frac{1}{6}e^t$$

2. Ecuația caracteristică are rădăcini reale confundate.

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0, \quad x(0) = 3, \quad \dot{x}(0) = 7$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2$$

$$x(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2c_1e^{-2t} + c_2(e^{-2t} + 2te^{-2t}) = \\ &= -2c_1e^{-2t} + c_2e^{-2t} - 2c_2te^{-2t} \end{aligned}$$

$$x(0) = c_1 + c_2 = 3, \quad c_2 = 3 - c_1$$

$$\dot{x}(0) = -2c_1 + c_2 = 7 \Rightarrow$$

$$-2c_1 + 3 - c_1 = 7, \quad -3c_1 = 4, \quad c_1 = -\frac{4}{3},$$

$$c_2 = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$$

$$x(t) = -\frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{13}{3}te^{-2t}$$

3. Ecuația caracteristică are rădăcini complexe.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 1$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + i, \quad \lambda_2 = -1 - i$$

$$x(t) = c_1e^{-t} \cos t + c_2e^{-t} \sin t$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= c_1(-e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t) + c_2(-e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t) \\ &= (c_1 + c_2)e^{-t} \cos t - (c_1 + c_2)e^{-t} \sin t \\ \begin{cases} x(0) = c_1 = 2 \\ \dot{x}(0) = c_1 + c_2 = 1 \end{cases} &\Rightarrow c_2 = -1 \end{aligned}$$

$$x(t) = 2e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t$$

Exemple de rezolvare EDO liniare neautonome, neomogene de ordinul II - Metoda operatorului invers

Exemplul 1

$$\ddot{x} + \dot{x} = t$$

$$\text{Fie } L(D)x(t) = (D^2 + D)x(t) = D(D+1)x(t)$$

Ecuatia este $D(D+1)x(t) = t$.

$$x_p(t) = \frac{1}{L(D)} t$$

$$(D+1)x(t) = e^{0t} \cdot \int e^{-0t} \cdot t dt = \int t dt = \frac{t^2}{2}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{D+1} \frac{t^2}{2} \Rightarrow$$

$$x_p(t) = e^{-t} \frac{1}{2} \int e^t t^2 dt = \frac{1}{2} e^{-t} \int e^t t^2 dt$$

$$\int e^t t^2 dt = t^2 e^t - 2 \int e^t t dt = t^2 e^t - 2(e^t \cdot t - \int e^t dt) =$$

$$= t^2 e^t - 2te^t + e^t = e^t (t-1)^2$$

$$x_p(t) = \frac{1}{2} e^{-t} (t-1)^2 = \frac{1}{2} t^2 - t + \frac{1}{2}$$

Soluția generală este

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2} t^2 - t + \frac{1}{2}$$

Exemple de rezolvare EDO liniare neautonome, neomogene de ordinul II - Metoda coeficienților nedeterminați

Cazul 1 $g(t)$ este exponențială

1.1. $\ddot{x} - 4\dot{x} - 12x = 3e^{5t}$

Soluția particulară va fi de forma $x_p(t) = Ae^{5t}$

$$25Ae^{5t} - 4(5Ae^{5t}) - 12(Ae^{5t}) = 3e^{5t} \Rightarrow A = \frac{3}{7}$$

$$x_p(t) = -\frac{3}{7} e^{5t}$$

1.2. Să se rezolve:

$$\ddot{x} - 4\dot{x} - 12x = 3e^{5t}$$

$$x(0) = \frac{18}{7}, \quad x'(0) = -\frac{1}{7}$$

Soluția generală este $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$, unde $x_c(t)$ este soluție pentru ecuația omogenă $\ddot{x} - 4\dot{x} - 12x = 0$.

Ecuția caracteristică:

Sisteme Dinamice

$$\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6 \Rightarrow$$

$$x_c(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{6t}$$

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{6t} - \frac{3}{7} e^{5t}$$

$$x'(t) = -2c_1 e^{-2t} + 6c_2 e^{6t} - \frac{15}{7} e^{5t}$$

Din condițiile inițiale:

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 - \frac{3}{7} = \frac{18}{7} \\ x'(0) = -2c_1 + 6c_2 - \frac{15}{7} = -\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow c_1 = 2, c_2 = 1$$

$$\text{Deci } x(t) = 2e^{-2t} + e^{6t} - \frac{3}{7} e^{5t}.$$

Cazul 2 $g(t)$ este trigonometrică (sin sau cos)

$$\ddot{x} - 4\dot{x} - 12x = \sin 2t$$

$$\text{Încercăm } x_p(t) = A \cos 2t + B \sin 2t$$

$$[4A \cos 2t - 4B \sin 2t - 4(-2A \sin 2t + 2B \cos 2t) - 12(A \cos 2t + B \sin 2t)]$$

$$= \sin 2t$$

$$(-16A - 8B) \cos 2t + (8A - 16B) \sin 2t = \sin 2t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -16A - 8B = 0 \\ 8A - 16B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{40}, \quad B = -\frac{1}{20}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{40} \cos 2t - \frac{1}{20} \sin 2t$$

Cazul 3 $g(t)$ este un polinom în t

$$\ddot{x} - 4\dot{x} - 12x = 2t^3 - t + 3$$

$$\text{Încercăm } x_p(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} -12At^3 + (-12A - 12B)t^2 + (6A - 8B - 12C)t + 2B - 4C - 12D \\ = 2t^3 - t + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -12A = 2 \\ -12A - 12B = 0 \\ 6A - 8B - 12C = -1 \\ 2B - 4C - 12D = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ B = \frac{1}{6} \\ C = -\frac{1}{9} \\ D = -\frac{5}{27} \end{cases}$$

Cazul 4 $g(t)$ este sub forma unor sume și/sau produse de funcții de bază.

$$4.1. \quad \ddot{x} - 4\dot{x} - 12x = te^{4t}$$

$$\text{Încercăm } x_p(t) = Ce^{4t}(At+B) \approx e^{4t}(At+B)$$

$$4[e^{4t}(4At+4B+A) - 12e^{4t}(At+B)] =$$

$$\Rightarrow e^{4t}(16At+16B+8A) -$$

$$= te^{4t} - 12Ate^{4t} + (4A-12B)e^{4t} = te^{4t}$$

$$\begin{cases} -12A = 1 & , & A = -\frac{1}{12} \\ 4A - 12B = 0 & , & B = -\frac{1}{36} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_p(t) = e^{4t}(3t+1) \cdot \left(-\frac{1}{36}\right)$$

4. 2. $\ddot{x} - 4\dot{x} - 12x = a e^{\alpha t} \sin \beta t$

Încercăm $x_p(t) = e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t)$

4. 3. $\ddot{x} - 4\dot{x} - 12x = (9t^2 - 103t) \cos t$

Încercăm $x_p(t) = (At^2 + Bt + C)(D \cos t + E \sin t)$

$$\approx (At^2 + Bt + C) \cos t + (At^2 + Bt + C) \sin t$$

4. 4. $\ddot{x} - 4\dot{x} - 12x = -e^{-2t} \cdot (3-5t) \cos 9t$

Încercăm $x_p(t) = e^{-2t} (At + B) \cos 9t + e^{-2t} (Ct + D) \sin 9t$

2.2.3 Rezolvarea EDO liniare de ordin superior în R

Revenim cu câteva aspecte generale legate de operatorul diferențial. Fie \mathcal{F} spațiul vectorial al funcțiilor infinit diferențiabile $R \rightarrow R$.

Definim "operatorul de diferențiere" $D : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ astfel:

$$Df = f'$$

Alți operatori pot fi construiți

$D^2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $D(Df) = D(f') = f''$ și, în general,
 $D^n f = f^{(n)}$.

Fie EDO liniară de ordin n

$$a_0(t)x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)\dot{x}(t) + a_n(t)x(t) = g(t) \quad (4.1)$$

unde $g(t)$ și $a_i(t)$, $i = \overline{0, n}$ sunt funcții în t diferențiabile iar $x(t)$ este funcția reală necunoscută.

Considerăm operatorul diferențial astfel încât

$$D^0 x = \left(\frac{d^0}{dt^0}\right) x = x, \quad Dx = \left(\frac{d}{dt}\right) x, \dots, D^n x = \left(\frac{d^n}{dt^n}\right) x$$

Ecuția (4.1) se poate scrie:

$$\left[a_0(t)D^n + a_1(t)D^{n-1} + \dots + a_{n-1}^{(t)}D + a_n(t) \right] \cdot x(t) = g(t) \quad (4.2)$$

sau

$$L(D)x(t) = g(t) \quad (4.3)$$

Ecuția (4.1) se numește "*neomogenă*", iar dacă $g(t) \equiv 0$ ea se numește *omogenă*. Ecuția (4.1) se numește "*neautonomă*", iar dacă $a_i(t) = a_i$ constant pentru $i = 0, \dots, n$ și $g(t) = g$ constant, atunci ecuația (4.1) se numește "*autonomă*".

Sisteme Dinamice

Fie $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ soluții pentru (4.1) astfel încât să fie liniar independente, i.e.

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1' & x_2' & \cdots & x_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \neq 0$$

Conform principiului superpoziției, $\sum_{i=1}^n C_i x_i(t)$ este soluție pentru (4.1).

La fel ca în cazul ecuațiilor de ordinul II, soluția $x_c(t)$ a ecuației (4.1) din cazul omogen (i.e. $g(t) = 0$) o numim "soluție complementară" iar soluția $x_p(t)$ din cazul $g(t) \neq 0$ o numim "soluție particulară" și ea satisface

$$L(D)x_p(t) = g(t) \tag{4.4}$$

Soluția generală pentru (4.1) este

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \tag{4.5}$$

EDO liniare autonome de ordin superior

Fie ecuația (4.1) omogenă și cu coeficienți constanți,

$$a_0 x^n(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0 \tag{4.6}$$

sau

$$L(D)x(t) \equiv (a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n) \cdot x(t) = 0 \quad (4.7)$$

Acestei ecuații îi asociem polinomul caracteristic:

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n\lambda + a_n \quad (4.8)$$

și ecuația caracteristică

$$p(\lambda) = 0 \quad (4.9)$$

Propoziția 2.1.

a) O combinație liniară de soluții pentru (4.6) este tot o soluție pentru (4.6);

b) Derivata unei soluții pentru (4.6) este tot o soluție pentru (4.6).

Definiția 2.2. O bază a soluțiilor lui (4.6) este o mulțime de soluții y_1, \dots, y_n astfel încât oricare altă soluție se scrie ca o combinație liniară de y_1, \dots, y_n într-un singur mod.

Terema 2.4. Fie problema (4.6)+(4.7) și ecuația caracteristică asociată (4.9) cu rădăcinile $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Dacă asociem o funcție $x_r = x_r(t)$ fiecărei rădăcini λ_r , $r = 1, 2, \dots, n$, atunci soluția (4.6)+(4.7) este o combinație de x_r , i.e.

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) \quad (4.10)$$

unde c_1, c_2, \dots, c_n sunt constante care se vor determina din condițiile inițiale, iar x_r sunt:

Sisteme Dinamice

- (i) $e^{\lambda_r t}$ pentru fiecare rădăcină reală simplă λ_r a lui (4.9);
- (ii) $e^{\lambda_r t}, te^{\lambda_r t}, t^2 e^{\lambda_r t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda_r t}$ pentru fiecare rădăcină reală de multiplicitate $k > 1$;
- (iii) $e^{\lambda_r t} \cos(\beta_r t)$ și $e^{\lambda_r t} \sin(\beta_r t)$ pentru fiecare pereche simplă de rădăcini complexe $\lambda_r = \alpha_r \pm i\beta_r$;
- (iv) $e^{\alpha_s t} \cos(\beta_s t), te^{\alpha_s t} \cos(\beta_s t), \dots, t^{h-1} e^{\alpha_s t} \cos(\beta_s t),$
 $e^{\alpha_s t} \sin(\beta_s t), te^{\alpha_s t} \sin(\beta_s t), \dots, t^{h-1} e^{\alpha_s t} \sin(\beta_s t)$ pentru fiecare pereche de rădăcini complexe $\lambda_s = \alpha_s \pm i\beta_s$ de multiplicitate $h > 1$.

Exemple

- Ex. 1 $x^{(4)} - 8x^{(2)} + 16x = 0$
 $p(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^2 + 16 = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 2)^2$.
Rădăcinile sunt $\lambda_1 = 2$ și $\lambda_2 = -2$,
ambele de multiplicitate 2.
Soluția este $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t} + (c_3 + c_4 t)e^{-2t}$.

- Ex. 2 $\overset{\dots}{x} - 3\overset{\dots}{x} + 7\overset{\cdot}{x} - 5x = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$$

$$x(t) = c_1 e^t + e^t (c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t)$$

Ex. 3 $L(D)x =$

$$(D^6 + 2D^5 + 4D^4 + 4D^3 + 5D^2 + 2D + 2)x = 0$$

$$p(\lambda) = (\lambda + 2)^2 (\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = (\pm i, \pm i, -1 \pm i)$$

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t +$$

$$c_4 t \sin t + e^{-t} (c_5 \cos t + c_6 \sin t)$$

Ex. 4 $L(D)x = (D^5 + 2D^3 + D)x = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = (0, \pm i, \pm i)$$

$$x(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t + c_4 t \cos t + c_5 t \sin t$$

Ex. 5 $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 5y^{(2)} + 4y' + 4y = 0.$

Rezultă că $p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda + 4$ este polinomul caracteristic asociat. Rădăcinile sunt: $-2, -2, i, -i$. Rezultă că soluția generală

$$\text{este } y(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t} + C \cos t + B \sin t$$

unde A, B, C, D sunt constante arbitrare.

EDO liniare neautonome, neomogene de ordin superior

Vom considera cazul
 $a_0(t) = a_0 \text{ const}, \dots, a_n(t) = a_n \text{ const}.$

Ecuția este

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = g(t) \quad (4.11)$$

sau

$$L(D)x(t) = g(t) \quad (4.12)$$

unde

$$L(D)x \equiv (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) x$$

Soluția generală pentru ecuația (4.11) sau (4.12) este

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t), \quad (4.13)$$

unde $x_c(t)$ este soluția complementară și corespunde cu soluția ecuației omogene asociată. Soluția particulară $x_p(t)$ se obține prin *metoda operatorului invers*, astfel:

$$x_p(t) = \frac{1}{L(D)} g(t)$$

Prin integrări repetate (vezi cazul EDO de ordin II) avem

$$x_p(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot \int e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \cdot \int e^{(\lambda_3 - \lambda_2)t} \dots \int e^{-\lambda_n t} \cdot g(t) (dt)^n \quad (4.14)$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt rădăcinile ecuației caracteristice asociate lui (4.11), i.e.

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Soluția $x_p(t)$ se poate obține și prin *metoda coeficienților nedeterminați* folosind funcțiile precizate pentru cazul EDO de ordin II.

2.3. EXEMPLE DE PROCESE MODELATE PRIN EDO

Exemplul 1

Considerăm un model economic – venitul național Y crește ca răspuns la excedentul cumulat D iar interesul național r crește ca răspuns la cererea de monedă $L(Y)$,

$$\begin{cases} \dot{Y} = h(D - S) \\ \dot{r} = m(L(Y) - M) \end{cases},$$

unde M este oferta monetară întreprinsă de banca centrală iar oferta globală S este producția națională. Mai putem rescrie modelul ca

$$\begin{cases} \dot{Y} = h(D - S) = -sY - ar \quad (h = 1, s, d > 0) \\ \dot{r} = m(L(Y) - M) = kY - M \quad (m = 1, k > 0) \end{cases},$$

Referind-ne la al doilea sistem, diferențiem prima ecuație și substituind pe a doua în prima avem

$$\ddot{Y} = s\dot{Y} - a\dot{r} = -s\dot{Y} - a(kY - M)$$

sau

$$\ddot{Y} + sY + ak\dot{Y} = aM.$$

Această ultimă ecuație are asociată ecuația caracteristică,

$$p(\lambda) = \lambda^2 + s\lambda + ak = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0,$$

cu rădăcinile $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-s \pm \sqrt{s^2 - 4ak})$.

Stabilitatea modelului depinde de semnul discriminantului. Dacă $s^2 > 4ak$ rădăcinile λ_1, λ_2 sunt reale și distincte. Dacă $s^2 = 4ak$ avem rădăcini reale confundate.

Dacă $s^2 < 4ak$ modelul este periodic stabil, iar soluția este

$$Y(t) = \frac{M}{K} + e^{-\frac{st}{2}} (B_1 \sin \beta t + B_2 \cos \beta t)$$

unde
$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{4ak - s^2} \quad \Rightarrow$$

$$\lambda = \alpha \pm i\beta = -\frac{s}{2} \pm \frac{1}{2} i \sqrt{4ak - s^2}$$

Exemplul 2

Model pentru creșterea prețului ca răspuns la cererea în exces asupra rolului stocurilor în echilibrul prețului

Stocul joacă un rol important în preț. Considerăm că stocul Q poate scăde până la un nivel critic \bar{Q} .

$$\dot{p} = -k(Q - \bar{Q}), \quad k > 0$$

unde $Q(t) = Q_0 + \int_0^t (S - D) d\sigma$ este cererea în exces cumulativă.

$D = \alpha + \beta p$: funcție cerere liniară

$S = \gamma + \delta p$: funcție de aprovizionare liniară

Diferențiem

$$\ddot{p} = -k\dot{Q} = -k(S - D)$$

sau

$$\ddot{p} - k(\delta - \beta)p + k(\alpha - \gamma)$$

Soluția este $p(t) = \frac{(\gamma - \alpha)}{(\delta - \beta)} + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$ unde

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{k(\beta - \delta)}.$$

Evident $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ dacă $\delta < \beta$ și complexe dacă $\beta < \delta$.

În ultimul caz soluția este:

$$p(t) = \frac{(\gamma - \alpha)}{(\delta - \beta)} + B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, \quad \text{unde}$$

$$\omega = \sqrt{k - (\delta - \beta)}.$$

În cazul $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ punctul de echilibru este de tip "șa". În ambele situații prețul este instabil.

Exemplul 3

Înjumătățirea duratei de viață a particulelor atomice

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n \quad ; \quad \lambda > 0$$

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda dt \quad ; \quad \ln n = -\lambda t + c_0 \quad ; \quad n = e^{-\lambda t + c_0} = c \cdot e^{-\lambda t}$$

$$; \quad c = e^{c_0}$$

Condiția inițială pentru $t = t_0$ este $n = n_0$. Atunci avem

Sisteme Dinamice

$$n_0 = c \cdot e^{-\lambda t_0}$$

$$c = n_0 \cdot e^{\lambda t_0}$$

$$n = n_0 e^{-\lambda t_0} \cdot e^{-\lambda t_0} = n_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

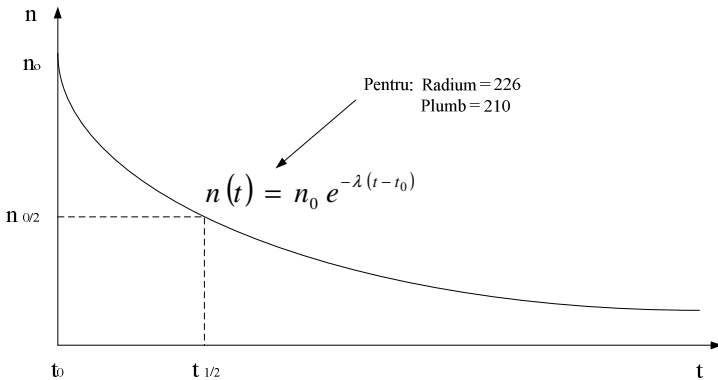
Dacă n_0 este nivelul inițial, ne interesează timpul când nivelul devine $\frac{n_0}{2}$. Notăm acest timp cu $t_{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{n_0}{2} = n_0 e^{-\lambda\left(t_{\frac{1}{2}} - t_0\right)} \quad ; \quad \frac{1}{2} = e^{-\lambda\left(t_{\frac{1}{2}} - t_0\right)} \quad ;$$

$$-\ln 2 = -\lambda\left(t_{\frac{1}{2}} - t_0\right) \quad ;$$

$$t_{\frac{1}{2}} = t_0 + \frac{\ln 2}{\lambda} = t_0 + \frac{0.693}{\lambda}$$

În mod obișnuiți luăm $t_0 = 0$. Rezultă $t_{\frac{1}{2}} = \frac{0.693}{\lambda}$.



În multe cazuri practice, se consideră că emisia radium 226 este constantă.

Fie $l(t)$ mărimea radioactivității în cazul plumb 210.

$$\frac{dl}{dt} = -\lambda l + r, \quad l(t_0) = l_0$$

$$l(t) = \frac{r}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + l_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

Să presupunem că suntem interesați de nivelul de radioactivitate peste 300 ani. Rezultă $t - t_0 = 300$.

$$\lambda l_e = \lambda \cdot l(t) \cdot e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1)$$

Exemplul 4 Ecuația logistică

Acest model este utilizat pentru:

- evidențierea creșterii populațiilor
- difuzarea produselor (product diffusion).

$$\frac{dx}{dt} = kx(a - x) \quad ; \quad \frac{dx}{(a-x)x} = kdt \quad ;$$

$$\int \frac{dx}{(a-x)x} = \int kdt + c_0$$

$$\frac{1}{(a-x)x} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a} \left(\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{a-x} \right) = \int kdt + c$$

Sisteme Dinamice

$$\frac{1}{a} (\ln x - \ln |a - x|) = kt + c_0 \quad ;$$

$$\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{a-x} \right| = kt + c_0 ;$$

$$\ln \left| \frac{x}{a-x} \right| = akt + ac_0 ; \quad \frac{x}{a-x} = e^{akt} \cdot e^{ac_0} = ce^{akt}$$

Condiția $x(t_0) = x_0$ este

$$\frac{x_0}{a-x_0} = ce^{akt_0} \Rightarrow c = \left(\frac{x_0}{a-x_0} \right) e^{-akt_0} \Rightarrow$$

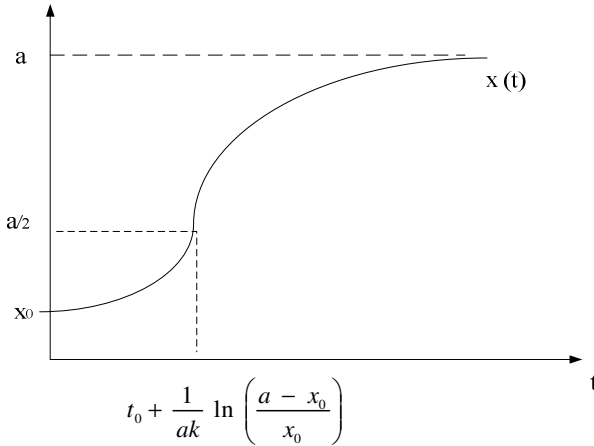
$$\frac{x}{a-x} = \left(\frac{x_0}{a-x_0} \right) e^{ak(t-t_0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{a \left(\frac{x_0}{a-x_0} \right) e^{ak(t-t_0)}}{1 + \left(\frac{x_0}{a-x_0} \right) e^{ak(t-t_0)}} .$$

$$x = \frac{ax_0}{(a-x_0) e^{-ak(t-t_0)} + x_0}$$

Fie $x_0 < a$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a$$



Exemplul 5 Modelul răspândirii produselor

Este modelul prin care se poate studia răspândirea în societate a inovațiilor tehnice (ex.: telefoanele mobile).

$$\frac{dN(t)}{dt} = g(t)(m - N(t))$$

unde $N(t)$ este numărul cumulativ al celor care adoptă inovația, m este numărul maxim al persoanelor care potențial adoptă inovația, $g(t)$ este un coeficient de adoptare. Luăm

$$g(t) = a + bN(t)$$

Atunci

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(\frac{a}{m} + bN(t) \right) (m - N(t))$$

Împărțim cu m notăm $F(t) = \frac{N(t)}{m}$ și avem:

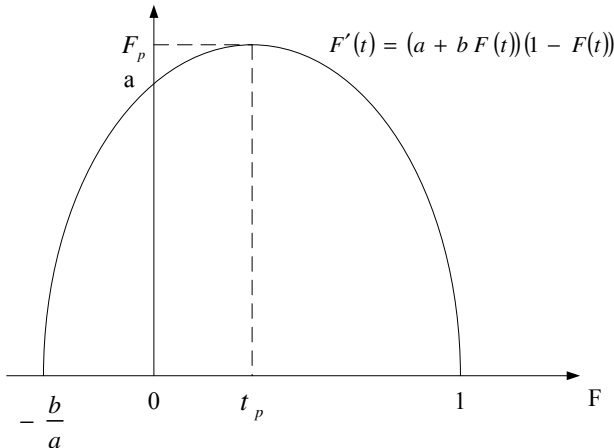
$$\frac{dF(t)}{dt} = (a + bF(t))(1 - F(t))$$

Soluția este $F(t) = \frac{1 - e^{-(a+b)t}}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)e^{-(b+a)t}}$

Dacă renunțăm la timpul t în ecuația precedentă modelul devine:

$$\dot{F} = (a + bF)(1 - F) \quad (4.13)$$

Pentru $\dot{F} = 0$ avem $(a + bF)(1 - F) = 0$ cu soluțiile $F_1 = -\frac{b}{a}$, $F_2 = 1$.



Punctul maxim al lui \dot{F} este pentru $\ddot{F} = 0$. Diferențind (4.13) și rezolvând în funcție de F , punctul de maximă răspândire este

$$F_p = \frac{1}{2} - \frac{a}{2b} \quad (4.14)$$

Pentru a găsi timpul $t = t_p$ care satisface $F(t) = F_p$, înlocuim (4.14) în expresia lui F . Se găsește valoarea

$$t_p = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{a + b}.$$

2.4. ASPECTE CALITATIVE LEGATE DE SOLUȚIILE EDO

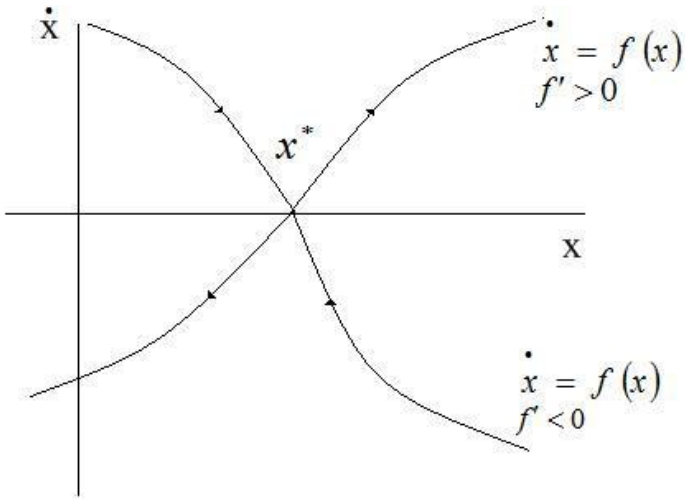
Nu orice ecuație diferențială poate fi rezolvată "*cantitativ*" (este cazul spre exemplu, al ecuațiilor neliniare). În multe situații "*studiul calitativ*" este mai interesant și mai utilizat. Studiul calitativ este obținut utilizând, printre altele, diagramele "*portret de fază*".

Considerăm cazul EDO autonome

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

În planul $\left(\begin{smallmatrix} \dot{x} \\ x \end{smallmatrix} \right)$, starea inițială x_0 este un punct care se mișcă pe traiectoria corespunzătoare lui cu viteza $\dot{x} = f(x)$ când timpul t crește.

Reamintim că punctul x^* pentru care $\dot{x} = 0$ sau $f(x^*) = 0$ se numește "*punct fix*", "*punct critic*", "*punct de echilibru*".



Exemplu. În cazul ecuației logistice $\dot{x} = kx(a-x)$ sunt două puncte fixe $x_1^* = 0$, $x_2^* = a$.

Dacă punctele de pe o traiectorie se apropie de un punct fix când t tinde la infinit, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

atunci spunem că punctul fix este "attractor".

Dacă punctele de pe traiectorie se depărtează de un punct fix când t tinde la infinit, atunci punctul fix se numește "repulsor".

Condiția ca un punct să fie attractor este:

$$f'(x^*) < 0$$

Condiția de punct repulsor (vezi figura precedentă) este:

Sisteme Dinamice

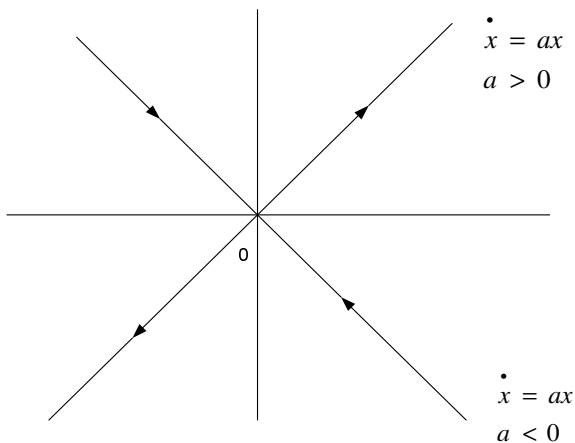
$$f'(x^*) > 0$$

Mai spunem că pentru

$f'(x^*) < 0$ punctul x^* este "echilibrul stabil"

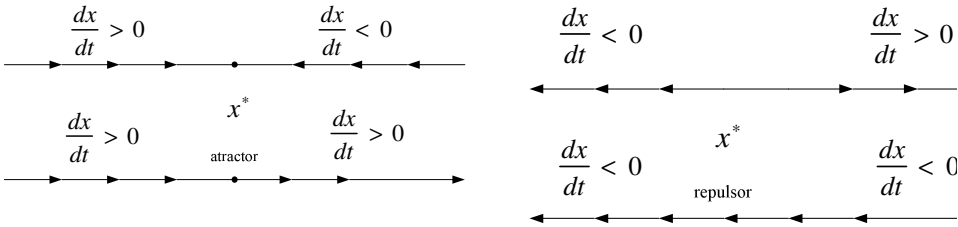
$f'(x^*) > 0$ punctul x^* este "echilibrul instabil".

Exemplu

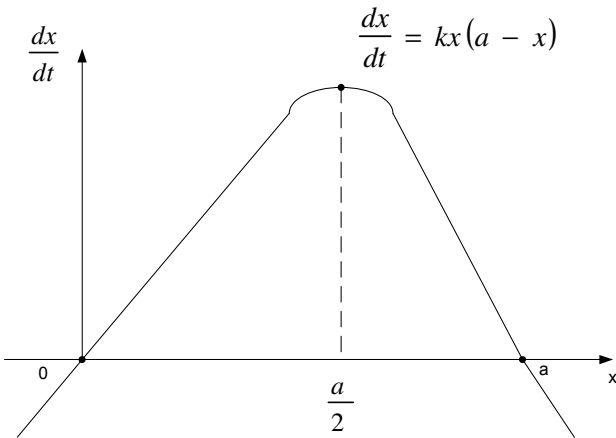


În cazul ecuației $\dot{x} = ax$, punctul fix este $x^* = 0$. Când $a < 0$, x^* este atractiv, iar când $a > 0$ este repulsor.

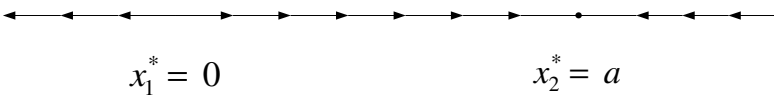
Mai observăm că, în cazul punctelor fixe x^* avem următoarele semne pentru $\frac{dx}{dt}$.



În cazul ecuației logistice $x = kx(a - x)$ graficul lui $\frac{dx}{dt}$ în funcție de x este

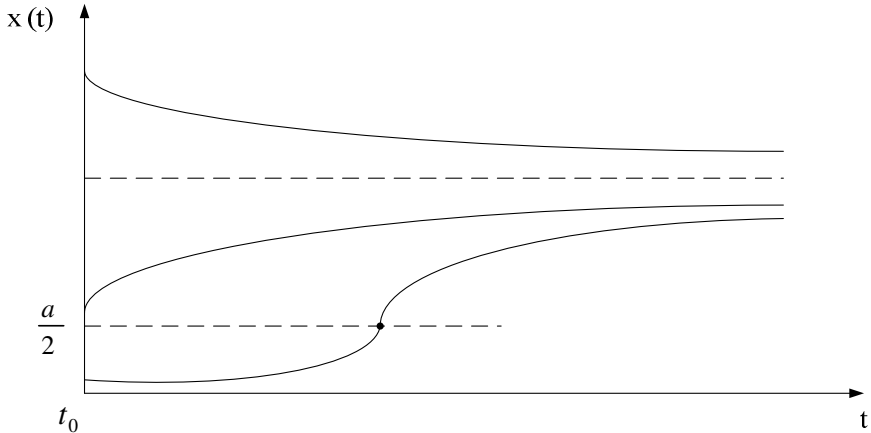


și evident $\frac{dx}{dt} > 0$ pentru $x \in (0, a)$ și $\frac{dx}{dt} < 0$ în rest. Avem deci:



$x_1^* = 0$ este repulsor, iar $x_2^* = a$ este atractor.

Atractivitatea lui $x^* = a$ se poate vedea și din graficul lui $x(t)$ în raport cu t .

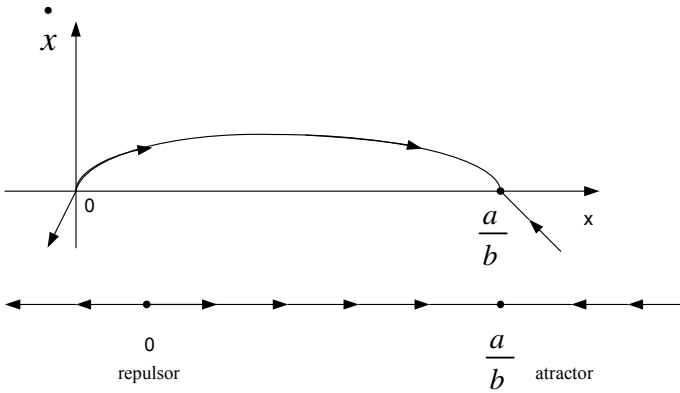


Dacă toate traiectoriile care pornesc din apropierea unui punct fix rămân aproape de acesta când $t \rightarrow \infty$, atunci punctul fix se numește "*stabil*". Un punct fix este "*asimptotic stabil*" dacă este stabil și, în plus, dacă orice traiectorie care pornește din apropierea lui se apropie de el când $t \rightarrow \infty$.

Punctul $x^* = a$ este asimptotic stabil în cazul ecuației logistice.

Alte exemple:

Exemplul 1 $\dot{x} = x(a - bx)$, $a, b > 0$



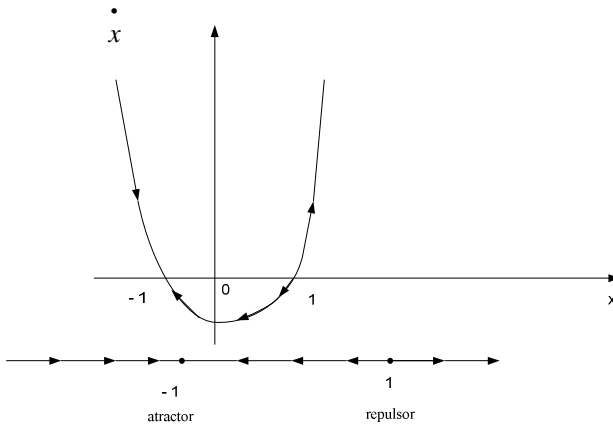
Observăm că $\dot{x} > 0$ pentru $x \in \left(0, \frac{a}{b}\right)$ și $\dot{x} < 0$ în rest.

În plus, $f'(0) = a > 0$, $f'\left(\frac{a}{b}\right) = -a < 0$, unde
 $f'(x) = a - 2bx$.

Din cele două rezultă că $x_1^* = 0$ este repulsor, iar $x_2^* = a$ este atractor.

Exemplul 2 $\dot{x} = x^2 - 1$

Sisteme Dinamice



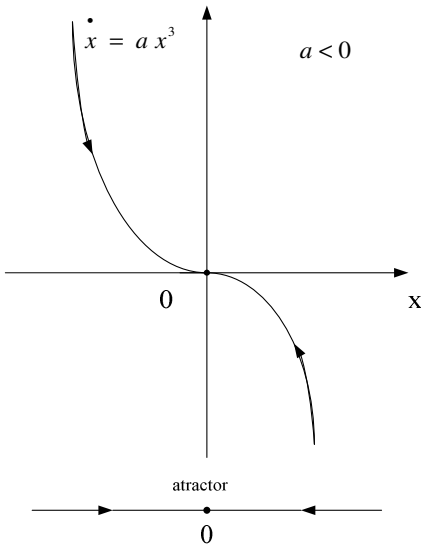
Observăm că $\dot{x} < 0$ pentru $x \in (-1, 1)$ și $\dot{x} > 0$ în rest.

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(-1) = -2 < 0, \quad f'(1) = 2 > 0$$

Din cele două rezultă că $x^* = -1$ este atractor și $x_2^* = 1$ este repulsor.

$$\text{Exemplul 3 } \dot{x} = ax^3 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2$$



Pentru $a < 0$:

$$\dot{x} > 0 \text{ pentru } x \in (-\infty, 0)$$

$$\dot{x} < 0 \text{ pentru } x \in (0, \infty)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 3ax^2 < 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3ax^2 < 0$$

Deci $x^* = 0$ este atractiv.

Pentru $a > 0$:

$$\dot{x} < 0 \text{ pentru } x \in (-\infty, 0)$$

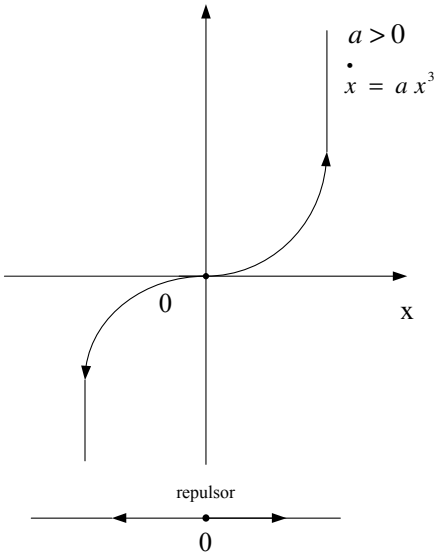
$$\dot{x} > 0 \text{ pentru } x \in (0, \infty)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 3ax^2 > 0$$

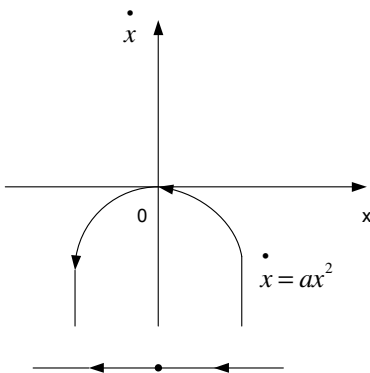
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3ax^2 > 0$$

Deci $x^* = 0$ este repulsiv.

Sisteme Dinamice



Exemplul 4 $\dot{x} = ax^2 \Rightarrow f'(x) = 2ax$

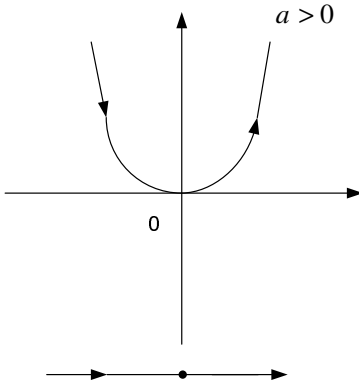


Pentru $a < 0$: $\dot{x} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$x^* = 0$ este (left) shunt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 2ax > 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2ax < 0$$



$x^* = 0$ este (right) shunt

Pentru $a > 0$: $\dot{x} > 0, \forall x \in R$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 2ax < 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2ax > 0$$

O mare parte dintre aceste noțiuni vor fi reluate la tematica *Sisteme dinamice*.

2.5. REZOLVAREA SISTEMELOR DE EDO

În continuare, suntem interesați de rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare. Aceasta deoarece numeroase situații din viața reală sunt generate de sisteme de ecuații diferențiale (ex.: problema evoluției populațiilor unei specii în contextul existenței și a unei populații de prădători).

Un alt motiv îl reprezintă faptul că sistemul de ecuații diferențiale liniare ajută în studiul comportamentului soluțiilor în cazul sistemelor de ecuații diferențiale neliniare.

Sistemele de EDO liniare au soluții cunoscute și acestea se exprimă în termenii unor funcții exponențiale.

Un sistem de EDO liniare autonome omogene este exprimat prin

$$\dot{x} = Ax, x \in R^n, x(0) = x_0 \quad (6.1)$$

unde A este o matrice constantă de $n \times n$, iar $x(0) = x_0$ este condiția inițială.

Soluția sistemului (6.1) ne dă posibilitatea să rezolvăm mai departe un sistem de EDO liniare neautonome, neomogene de forma

$$\dot{x} = Ax + g(t), x \in R^n, x(0) = x_0 \quad (6.2)$$

unde A este o matrice constantă $n \times n$, iar $g: R \rightarrow R^n$ este o funcție continuă nenulă.

2.5.1 Rezolvarea sistemelor de EDO liniare omogene și autonome

Exponențiala unei matrici are proprietăți similare cu exponențiala unui număr real.

Propoziția 2.2. $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{tA} = e^{tA} A.$

Intr-adevăr,

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{tA} \cdot e^{hA} - e^{tA}}{h} = e^{tA} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - I}{h} = e^{tA} \cdot A$$

unde ultima limită este egală cu A din definiția seriilor lui e^{hA} .

Teorema 2.5. Soluția PVI (6.1) este

$$e^{tA} \cdot x_0 \tag{6.3}$$

și nu există o altă soluție.

Demonstrație Conform propoziției anterioare,

$$\frac{d}{dt} (e^{tA} x_0) = \frac{d}{dt} (e^{tA}) \cdot x_0 = Ae^{tA} \cdot x_0$$

Cum $e^{0A} x_0 = x_0$, rezultă că (6.3) este soluția pentru (6.1).

Să arătăm că nu există alte soluții pentru (6.1).

Fie $x(t)$ o altă soluție pentru (6.1). Fie $y(t) = e^{-tA} x(t)$

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt} (e^{-tA}) x(t) + e^{-tA} \dot{x}(t) =$$

$$= -Ae^{-tA} x(t) + e^{-tA} Ax(t) = e^{-tA} (-A + A)x(t) = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = ct. \text{ Pentru } t=0 \text{ avem } y(t) = x_0.$$

În continuare dăm o teoremă care ne va ajuta să determinăm exponențiala din (6.3), implicit soluția lui (6.1), în cazul când matricea A are valori proprii cu factor de multiplicitate 1.

Terema 2.6. Fie A o matrice $n \times n$ cu k valori proprii distincte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ și $m = \frac{1}{2}(n-k)$ perechi de valori proprii complexe conjugate $\rho_1 \pm i\omega_1, \dots, \rho_m \pm i\omega_m$. Atunci există o matrice inversabilă P , astfel încât

$$P^{-1}AP = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, B_1, \dots, B_m) \quad \text{unde}$$

$$B_i = \begin{pmatrix} \rho_i & -\omega_i \\ \omega_i & \rho_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, m}$$

În plus

$$e^{tA} = P \cdot e^{t\Lambda} P^{-1} \quad (6.4)$$

$$e^{t\Lambda} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}, e^{tB_1}, \dots, e^{tB_m}) \quad (6.5)$$

iar

$$e^{tB_i} = e^{\rho_i t} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_i t) & -\sin(\omega_i t) \\ \sin(\omega_i t) & \cos(\omega_i t) \end{pmatrix}$$

Observație Fie $(e_i)_{i=\overline{1, k}}$ vectorii proprii asociați cu $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Fie $(z_j)_{j=\overline{1, m}}$ vectorii proprii complecși asociați cu $\rho_j + i\omega_j$.

În cadrul demonstrației acestei teoreme se face alegerea

$$P = [e_1, \dots, e_k J_m(z_1), R_e(z_1), \dots, J_m(z_m), R_e(z_m)] \quad (6.6)$$

Cum vectorii proprii sunt independenți avem $\det(P) \neq 0$ și, din alegere, $AP = P \wedge \Rightarrow P^{-1}AP = \wedge$.

Proprietate a soluțiilor sistemelor de EDO liniare

Dacă putem găsi n soluții independente pentru un sistem de EDO liniare, atunci orice altă soluție se poate exprima în funcție de acestea.

Fie $x_1(t), \dots, x_n(t)$ soluțiile independente. Soluția generală poate fi scrisă

$$x(t) = \Phi(t) \cdot C, \quad C \in R^n$$

unde C este constant iar $\Phi(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$, unde $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ sunt vectori coloană. $\Phi(t)$ se numește *matricea fundamentală* pentru problema (6.1) iar e^{tA} este alegerea naturală pentru această matrice.

În termenii matricei fundamentale avem

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 = \Phi(0) \cdot c &\Rightarrow c = \Phi(0)^{-1} \cdot x_0 \\ \Rightarrow x(t) = \Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1} \cdot x_0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Comparând (6.7) cu soluția (6.3) avem

$$e^{tA} = \Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1} \quad (6.8)$$

Propoziția 2.3. Fie P, S, T , matrici $n \times n$ (operatori în R^n).

Atunci:

1. dacă $Q = PT P^{-1}$, atunci $e^Q = P \cdot e^T \cdot P^{-1}$

2. dacă $ST = TS$, atunci $e^{S+T} = e^S \cdot e^T$

3. $e^{-S} = (e^S)^{-1}$

4. dacă $n = 2$ și $T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, atunci

$$e^T = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$$

Pentru cazul matricilor $A_{2 \times 2}$ se poate calcula ușor e^A ținând seama de următoarele observații.

Se poate găsi o matrice inversabilă $P_{2 \times 2}$ astfel încât:

1. $B = P A P^{-1}$

2. B are una dintre următoarele forme:

2.1. $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$

2.2. $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

2.3. $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$

3. e^B se poate calcula din 2:

$$3.1. \quad e^B = \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{bmatrix} \quad \text{în cazul 2.1}$$

$$3.2. \quad e^B = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix} \quad \text{în cazul 2.2}$$

$$3.3. \quad e^B = e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{în cazul 2.3}$$

$$\text{Din } B = P A P^{-1} \Rightarrow P^{-1} B P = A \Rightarrow e^A = e^{P^{-1} B P} = P^{-1} e^B P.$$

$$\text{Deci } e^A = P^{-1} e^B P.$$

Există o relație simplă între vectorii și valorile proprii ale matricilor A și e^A (unde A este $n \times n$).

Propoziția 2.4. *Dacă $x \in R^n$ este un vector propriu al lui A , corespunzător valorii proprii α , atunci x este un vector propriu și pentru e^A corespunzător valorii proprii e^α .*

Exemple de calcul

Ex. 1 Să se determine soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} \bullet \\ x_1 = x_1 \\ \bullet \\ x_2 = x_1 + 2x_2, \quad \text{cu condiția } x(0) = (a, b, c) \\ \bullet \\ x_3 = x_1 - x_3 \end{cases}$$

Sisteme Dinamice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(-1 - \lambda) \Rightarrow$$

Valorile propri sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$. Deci

$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{t\Lambda} = \begin{pmatrix} e^t & & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Să calculăm $P^t = (e_1, e_2, e_3)$ unde e_i , $i = \overline{1,3}$ sunt vectorii propri corespunzători λ_i , $i = \overline{1,3}$.

Fie următoarele valori pentru vectorii propri e_2 și e_3 .

$$\text{Din coloana 2 a matricei } A \text{ rezultă } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Din coloana 3 a matricei } A \text{ rezultă } e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Să calculăm } e_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Avem: } (A - \lambda_1 I) \cdot e_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -v_1 \\ v_3 = \frac{v_1}{2} \end{cases} . \text{ Fie } v_1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -2 \\ v_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{2t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix} .$$

$$\text{Ex. 2 } \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2 \Rightarrow e^{t\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{Vectorii propri sunt: } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = P^{-1} e^{t\Lambda} P = \begin{pmatrix} e^{-2t} & \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{4} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Pentru condiția inițială $x(0) = (a, b)$ avem soluția

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{ae^{-2t} + b(e^{2t} - e^{-2t})}{4} \\ be^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Să se rezolve $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$ pentru $x(0) = (a, b)$ în cazurile:

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

2. Să se rezolve $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^3$ pentru $x(0) = (a, b, c)$ în cazurile:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

2.5.2 Rezolvarea sistemelor de EDO liniare autonome în \mathbb{R}^2

Soluția ecuației (6.1₁) poate fi găsită și altfel.

Ne reamintim că pentru cazul $n = 1$ sistemul (6.1₁) se reduce la o simplă EDO liniară

$$\dot{x} = ax$$

care are soluția $x(t) = K e^{at}$.

Atunci vom încerca soluția

$$x(t) = y e^{rt} \tag{6.9}$$

pentru ecuația (6.1₁). Derivând (6.9) obținem

$$x'(t) = r y e^{rt}$$

și înlocuind în ecuația 6.1₁) avem

$$r y e^{rt} = A \eta e^{rt}$$

$$(A - rI) \eta e^{rt} = 0$$

Rezultă că

$$(A - rI) y = 0$$

Cu alte cuvinte, (6.9) este soluție pentru (6.1₁) dacă r este valoare proprie și μ este vector propriu pentru matricea A .

În concluzie, soluțiile ecuației (6.1₁) sunt de forma

$$x(t) = \eta e^{\lambda t} \tag{6.10}$$

unde λ este valoarea proprie iar η este vector propriu pentru matricea A .

Propoziția 2.5. *Soluțiile ecuației (6.1₁) sunt după cum urmează.*

a. dacă matricea A are valori propri reale și distincte λ_1 și λ_2 atunci soluția este

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \eta_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \eta_2$$

unde η_1 și η_2 sunt vectorii propri corespunzători.

b. dacă matricea A are valori propri reale și confundate $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ atunci soluția este

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} \eta + c_2 (t e^{\lambda t} \eta + e^{\lambda t} \rho)$$

unde η este vectorul propriu corespunzător iar ρ este vectorul care satisface ecuația vectorială

$$(A - \lambda I)\rho = \eta$$

c. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ și vectori propri η_1, η_2 , atunci soluția este

$$x(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

Observație În cazul c soluția se calculează

$x(t) = c_1 \alpha^{(\alpha+i\beta)t} \eta_1$ sau ținând cont de forma lui Euler pentru exponențiala numerelor complexe, avem

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cdot (\cos \beta t + i \sin \beta t) \cdot \eta_1$$

iar după calcule, obținem forma

$$x(t) = u_1(t) + i u_2(t).$$

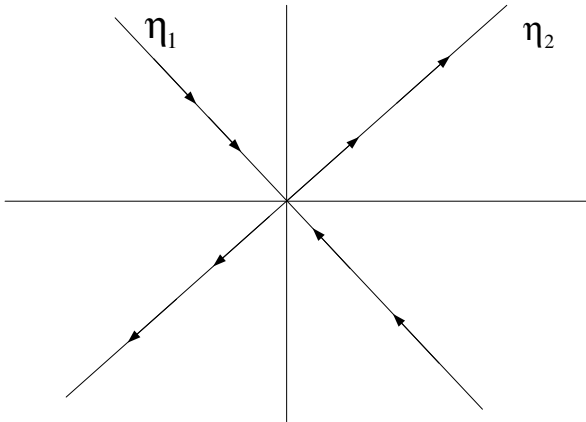
Se poate arăta că u_1 și u_2 sunt soluții pentru (6.1₁) și atunci combinația lor liniară

$$x(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

este tot soluție pentru (6.1₁).

Exemple de calcul pentru cazurile din propoziția 2.5

Fie cazul $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ și $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$

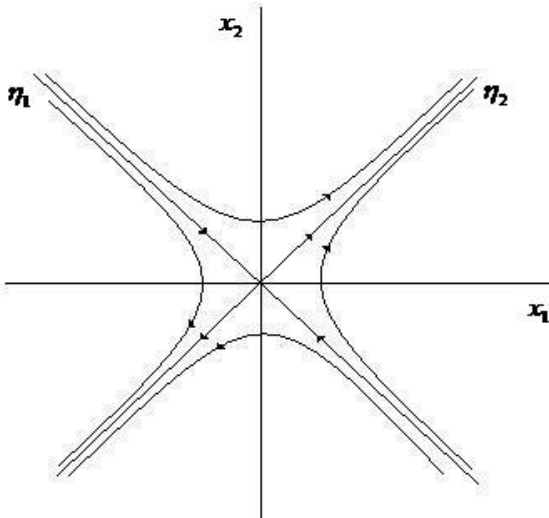


$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \eta_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \eta_2$$

Dacă $c_2 = 0$ atunci traiectoriile vor fi paralele cu η_1 iar mișcarea punctelor se va face spre origine deoarece $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} = 0$. Mișcarea se va face în cadranul II dacă $c_1 > 0$ și în $c_1 < 0$. Același lucru se întâmplă și pentru puncte ce se află pe dreapta determinată de η_1 .

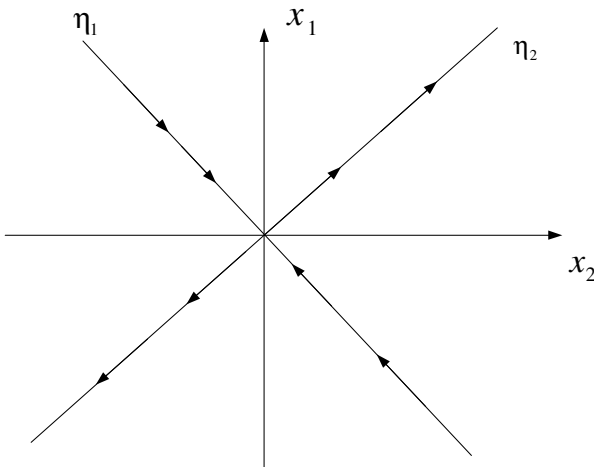
Dacă $c_1 = 0$ atunci traiectoriile sunt paralele cu η_2 . Punctele se depărtează prin mișcare de origine deoarece $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_2 t} = 0$. Dacă $c_2 > 0$ mișcarea este de cadranul I iar dacă $c_2 < 0$ mișcarea este în cadranul III. Același lucru se întâmplă pentru punctele ce se află pe dreapta determinată de η_2 .

Sisteme Dinamice



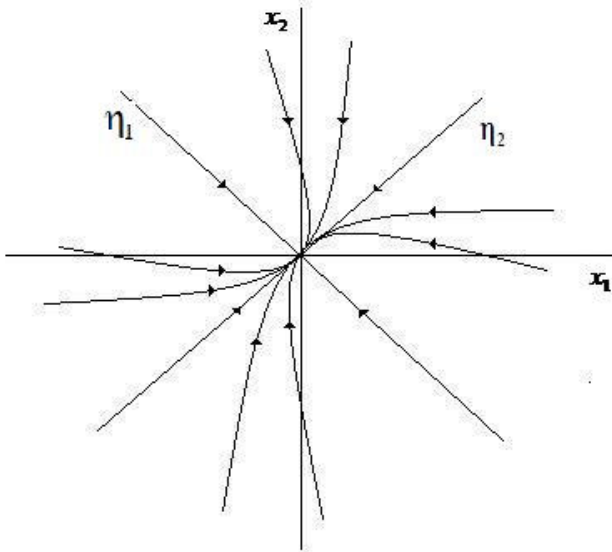
În acest caz punctul de echilibru este "*punct șă*" și este instabil.

Fie cazul $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.



Dacă $c_2 = 0$ traiectoriile vor fi paralele cu η_1 . Mișcarea punctelor se va face spre origine deoarece $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} = 0$. Mișcarea va fi în cadranul II dacă $c_1 > 0$ și în cadranul IV dacă $c_2 < 0$.

Dacă $c_1 = 0$ traiectoriile vor fi paralele cu μ_2 . Mișcarea se va face tot spre origine în cadranele I și III.



Punctul de echilibru este "nod" și este asimptotic stabil.

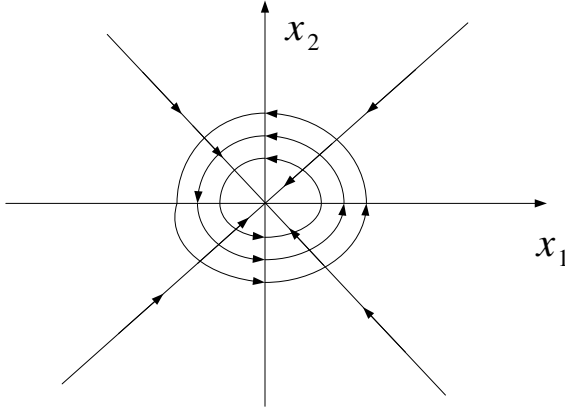
Fie cazul $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, imaginare pure.

Soluția nu are componentă exponențială. Ea se exprimă doar în funcție de sinus și cosinus. Mișcarea punctelor se

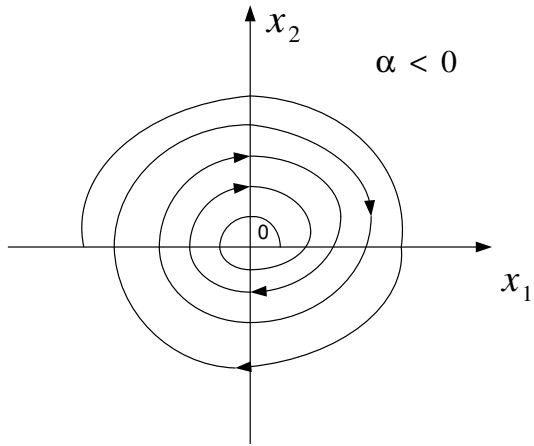
Sisteme Dinamice

va face în jurul originii sub forma unor elipse (sau cercuri).

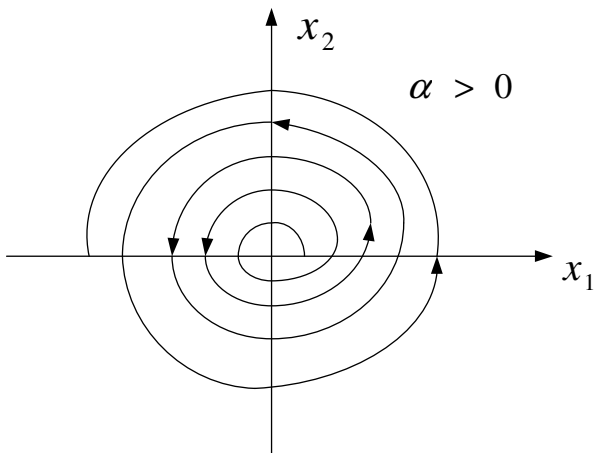
Punctul de echilibru este "*centru*" și este stabil.



Fie cazul $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Mișcarea are și componentă exponențială. Punctele din plan se vor deplasa pe traiectorii spirală spre origine dacă $\alpha < 0$ și depărtându-se de origine dacă $\alpha > 0$.



Punct de echilibru "spirală stabilă"



Punct de echilibru "spirală instabilă"

Sisteme Dinamice

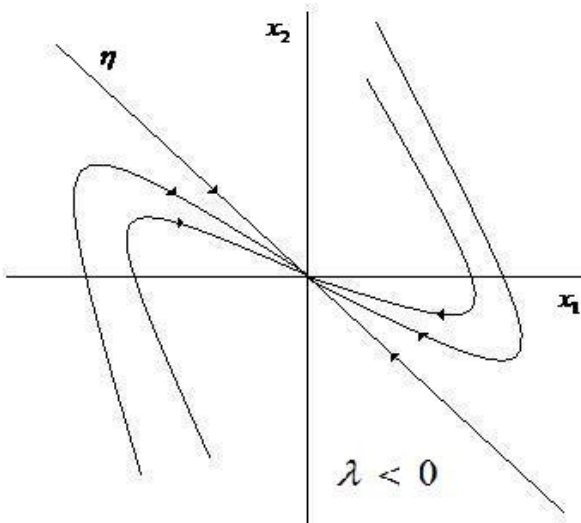
Fie cazul $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

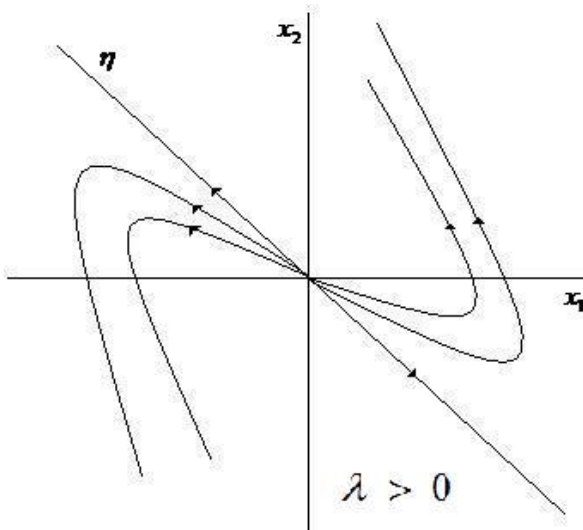
Punctele se mișcă spre origine dacă $\lambda < 0$ și depărtându-se de origine dacă $\lambda > 0$. Același lucru se poate spune și despre punctele care se află pe dreapta determinată de η , unde η este vectorul propriu corespunzător.

Mișcarea punctelor se face pe direcții paralele cu vectorul propriu.

Punctul fix se numește "*nod impropriu*":

- stabil, dacă $\lambda < 0$ și,
- instabil, dacă $\lambda > 0$.





2.5.3. Varietăți invariante

Teorema 2.7. *Fie sistemul (6.1). Dacă valorile propri ale matricei A sunt distincte atunci \mathbb{R}^n se descompune într-o sumă directă de subspații unu-dimensionale și bidimensionale. Fiecare dintre aceste subspații este invariant în raport cu fluxul definit de ecuația (6.1₁).*

Exemplu Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Sisteme Dinamice

Valorile propri sunt $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -3$, $\lambda_{4,5} = -2 \pm i$.

În acest caz \mathbb{R}^5 se descompune în următoarele subspații:

- un spațiu unu-dimensional corespunzător lui $\lambda_1 = 2$;
- un spațiu bi-dimensional corespunzător valorii propri multiple $\lambda_{2,3} = -3$;
- un spațiu bi-dimensional corespunzător valorii propri complexe conjugate $\lambda_{4,5}$.

Pentru a rezolva ecuația

$$\dot{x} = Ax$$

unde A este dată de (6.11) putem lucra independent în fiecare dintre cele trei subspații.

Astfel, dacă $x(0) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ este condiția inițială atunci putem rezolva pe rând ecuațiile:

$$\dot{x}_1 = 2x_1, x_1(0) = y_1 \quad (6.12)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4(0) \\ x_5(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Obținem soluțiile:

$$x_1(t) = x_0 e^{2t}$$
$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 e^{-3t} + y_3 t e^{-3t} \\ y_3 t e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} (y_4 \cos t - y_5 \sin t) \\ e^{-2t} (y_4 \sin t + y_5 \cos t) \end{pmatrix}$$

În general, considerăm ecuația (6.1) și notăm cu:

(u_i) , $1 \leq i \leq n_u$ vectorii proprii corespunzători acelor valori propri care au partea reală strict pozitivă;

(c_j) , $1 \leq j \leq n_c$ vectorii proprii corespunzători valorilor propri care au partea reală nulă;

(s_k) , $1 \leq k \leq n_s$ vectorii proprii corespunzători valorilor propri care au partea reală strict negativă.

Evident, $n = n_u + n_c + n_s$.

Originea $x = 0$ este punctul fix (sau staționar) al fluxului.

Definim:

$E^u(0)$ subspațiul invariant determinat de vectorii propri (u_i) . Îl numim "*varietate instabilă*";

$E^c(0)$ subspațiul invariant determinat de vectorii propri (c_j) . Îl numim "*varietate centrală*";

$E^s(0)$ subspațiul invariant determinat de vectorii propri (s_k) . Îl numim "*varietate stabilă*".

Teorema 2.8. Fie ecuația (6.1). Dacă $n_c = 0$ atunci

$$E^u(0) = \left\{ x \in R^n \mid e^{tA} x \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty \right\};$$

$$E^s(0) = \left\{ x \in R^n \mid e^{tA} x \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \right\}.$$

Exemplu Fie ecuația

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^3 \quad (6.15)$$

unde A are o valoare proprie reală și pozitivă și o pereche de valori propri complexe conjugate, i.e.

$$\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega$$

$$\lambda_3 = \lambda$$

unde $\lambda > 0$, $\rho < 0$, $\omega \neq 0$.

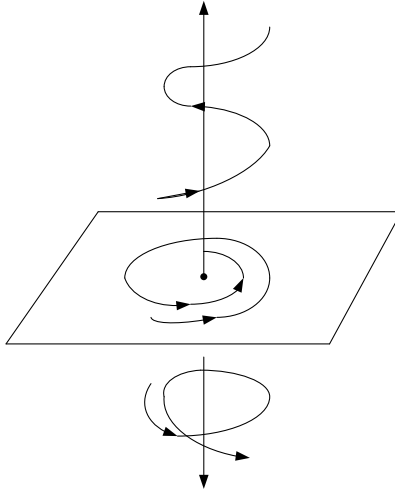
Ecuției (19) i se asociază "forma normală"

$$\dot{\lambda} = \Lambda y, y \in \mathbb{R}^3 \quad (6.16)$$

unde

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \rho & -\omega & 0 \\ \omega & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Varietatea inițială corespunde axei y_3 iar varietatea stabilă este bidimensională, anume planul $y_3 = 0$. În acest plan mișcarea este dată de o spirală logaritmică iar pe axa y_3 mișcarea este de îndepărtare față de origine.



2.5.4. Transformarea EDO liniare, omogene, autonome de ordin n în sistemele autonome de EDO liniare de ordinul I

Fie

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (6.17)$$

unde $y \rightarrow y(t)$ este o funcție reală în t , iar $y^{(n)}$ este derivata de ordin n a lui y . Valorile a_1, \dots, a_n sunt constante.

Ecuția (6.17) este echivalentă unui sistem de n ecuații liniare de ordinul I.

Fie noile variabile

Sisteme Dinamice

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{x}_1, \dots, x_n = \dot{x}_{n-1}$$

Atunci, ecuația (6.11) este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n \end{cases} \quad (6.18)$$

În notație vectorială avem

$$\dot{x} = A x, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (6.19)$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-1} & & -a_2 & -a_2 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

Polinomul caracteristic al unei matrici de ordin $n \times n$, B , este $\det(B - \lambda I)$.

Propoziția 2.6. Polinomul caracteristic asociat ecuației (6.17), unde $A_{n \times n}$ este dată de (6.20), este

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda + \dots + a_n \quad (6.21)$$

2.5.5. Alte exemple de rezolvare a sistemelor de EDO liniare autonome omogene

1. $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(2+\lambda)(2-\lambda) = -(4-\lambda^2) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2$$

$$Ae_2 = \lambda_2 e_2 \Leftrightarrow Ae_2 = 2e_2$$

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix}$$

$-2v_1 + v_2 = 2v_1$; $2v_2 = 2v_2$, rezultă $v_2 = 4v_1$. Fie $v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = 4$.

Avem $e_2 = (1, 4)^t$.

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1 \Leftrightarrow Ae_1 = -2e_1$$

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_1 \\ -2v_2 \end{pmatrix}$$

$-2v_1 + v_2 = -2v_1$; $2v_2 = -2v_2$, rezultă $v_2 = 0$.

$$e_1 = (v_1, 0)^t. \text{ Alegem } e_1 = (1, 0)^t.$$

$$\begin{cases} e_2 = (1, 4)^t \\ e_1 = (1, 0)^t \end{cases} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

În general pentru $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$$\text{Atunci } P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{t\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = P e^{t\Lambda} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & \frac{(e^{2t} - e^{-2t})}{4} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Fie $x_0 = (a, b)^t$.

Soluția este

$$e^{tA} \cdot x_0 = \begin{pmatrix} e^{-2t} & \frac{(e^{2t} - e^{-2t})}{4} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} + \frac{b}{4}(e^{2t} - e^{-2t}) \\ be^{2t} \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad \dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0 = (a, b)^t$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda i) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i \begin{cases} \lambda_1 = 1 + i \\ \lambda_2 = 1 - i \end{cases}$$

$$Az_1 = \lambda_1 z_1 \quad A \cdot \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix} = (1 + i) \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a_1 + 2b_1i + a_2 + b_2i \\ -2a_1 - 2b_1i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 + (a_1 + b_1)i \\ a_2 - b_2 + (a_2 + b_2)i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + (2b_1 + b_2)i = a_1 - b_1 + (a_1 + b_1)i \\ -2a_1 - 2b_1i = a_2 - b_2 + (a_2 + b_2)i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = a_1 - b_1 \\ 2b_1 + b_2 = a_1 + b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a_1 = a_2 - b_2 \\ -2b_1 = a_2 + b_2 \end{cases}$$

$$\text{Soluția} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = -1 \\ b_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow z_1 = \begin{pmatrix} 1 + 0i \\ -1 + i \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{t\Lambda} = e^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = P e^{t\Lambda} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

Soluția

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA} \cdot x_0 = e^t \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a e^t (\cos t + \sin t) & b e^t \sin t \\ -2 a e^t \sin t & b e^t (\cos t - \sin t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{t\Lambda} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Din coloana doi a matricei A rezultă $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 1, 0)^t$.

Din coloana trei a matricei A rezultă $e_3 = (0, 0, 1)^t$.

Pentru e_1 avem $(A - \lambda_1 \cdot I)e_1 = 0 \Leftrightarrow (A - I)e_1 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -v_1 \\ v_3 = \frac{1}{2} v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_2 = -2 \\ v_3 = 1 \end{cases}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2, -2, 1)^t.$$

Sisteme Dinamice

$$P^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$P_{11} = 1, \quad P_{12} = -2, \quad P_{13} = -1$$

$$P_{21} = 0, \quad P_{22} = 2, \quad P_{23} = 0$$

$$P_{31} = 0, \quad P_{32} = 0, \quad P_{33} = 2$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot \text{cofactor}(P)$$

$$\text{cofactor}(P)^t = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(P) = 2.$$

Temă

$$1. \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 3$$

$$2. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 1$$

$$3. \dot{x}_1 = Ax, \quad x(0) = (3, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4. $\dot{x}_1 = Ax$, $x(0) = (0, -b, b)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

5. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x$, $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = -1 , \lambda_2 = 4 \Rightarrow \bar{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \bar{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tot pentru acelasi caz, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{2}{2} \end{pmatrix}$,

$$x_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -3 , \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

6. $\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = -1 , \lambda_2 = -6 \Rightarrow \bar{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} , \bar{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} x$, $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{3}i \quad \Rightarrow \quad \bar{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 - \sqrt{3}i \end{pmatrix} ,$$

$$\bar{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 + \sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

$$8. \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} x , \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm 8i \quad \Rightarrow \quad \bar{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 + 8i \\ 5 \end{pmatrix} , \quad \bar{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 - 8i \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$9. \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} x , \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = 5 \quad \Rightarrow \quad \bar{\eta}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pentru } \rho: \quad (A - \lambda i) \bar{\rho} = \bar{\eta} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ 1 - 2\rho_1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\rho} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\rho_1 = 0$$

$$10. \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} & -2 \end{pmatrix} x , \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rho = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.6. REZOLVAREA NUMERICA A SISTEMELOR DE EDO

Metoda Runge-Kutta

Fie PVI

$$\dot{x} = f(t, x), x(0) = x_0 \quad (8.1)$$

unde $f: [0, T] \times R^k \rightarrow R^k$ este o funcție continuă, iar $x_0 \in R^k$ este condiția inițială.

Metoda generală Runge-Kutta (vom prescurta R-K) cu pas variabil, pentru determinarea numerică, în intervalul de timp $[0, T]$, a soluției problemei (8.1) este:

$$y_i^{(n+1)} = x_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} \cdot f(t_{n,j}, y_j^{(n+1)}), \quad i = 1, \dots, s$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t_n \sum_{i=1}^s b_i \cdot f(t_{n,i}, y_i^{(n+1)}), \quad (8.2)$$

$$t_{n,i} = t_n + c_i \Delta t_n, \quad i = 1, \dots, s$$

unde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = T$ este o diviziune a intervalului $[0, T]$, iar $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$. Evident, avem

$$\sum_{i=1}^N \Delta t_i = T.$$

Numerele $a_{ij}, b_i \in R$ sunt date pentru fiecare metodă și reprezintă coeficienții acesteia, iar $C_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$, $i = 1, \dots, s$.

Punctul $x_0 \in R^k$ este punctul inițial pentru metoda (8.2), iar $x_n \in R^k$ aproximează soluția exactă $x(t_n)$ a lui (8.1) la timpul t_n .

Dacă în (8.2) avem $a_{ij} = 0$, $1 \leq i \leq j \leq s$ metoda $R-K$ se numește *explicită*, altfel se spune că ea este *implicită*.

Definiția 2.3. Metoda (8.2) este convergentă la soluția x a lui (8.1) dacă

$$\lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq n \leq N} \|x(t_n) - x_n\| \right) = 0,$$

unde x_n este soluția (8.2) și atât x cât și x_n corespund condiției inițiale x_0 .

Definiția 2.4. Eroarea de trunchiere $T(x, \Delta t)$ a metodei $R-K$ (8.2) este dată de

$$(8.3) \quad T(x, \Delta t) = x(\Delta t) - x_1$$

unde $x(\Delta t)$ este soluția (8.1) la timpul $t = \Delta t$ cu condiția inițială $x(0) = x_0$, iar x_1 este soluția metodei (8.2) cu pasul Δt și condiția x_0 .

Cu alte cuvinte, $T(x, \Delta t)$ este eroarea pe care metoda $R-K$ o face într-o iterație.

Definiția 2.5. Eroarea de discretizare la timpul t_n , $t_n = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t_i$ a metodei $R-K$ (8.2) este definită prin

$$e_n = x(t_n) - x_n \quad (8.4)$$

unde $x(t_n)$ este soluția problemei (8.1) la timpul t_n , iar x_n este soluția calculată de (8.2) la timpul t_n , ambele soluții corespunzând condiției inițiale x_0 .

Definiția 2.6. Spunem că metoda $R-K$ (8.2) este de **ordin r** dacă

(i) pentru toate funcțiile $f \in C^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ și pentru orice $x \in \mathbb{R}^k$ avem:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{\|T(x, \Delta t)\|}{\Delta t^{r+1}} < \infty$$

(ii) există $f \in C^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ și $x \in \mathbb{R}^k$ astfel încât:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|T(x, \Delta t)\|}{\Delta t^{r+2}} = \infty.$$

În particular, metoda $R-K$ se poate aplica unei probleme

$$\dot{x} = f(t, x), x(0) = x_0 \quad (8.5)$$

în care $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ nu depinde explicit de timp (i.e. (8.5)₁ este o ecuație diferențială autonomă). În condițiile existenței și unicității soluției ecuației (8.5)₁, vom vedea că problemei (8.5) i se poate asocia un sistem dinamic continuu.

Metoda $R-K$ care rezolvă numeric problema (8.5) este

$$y_i^{(n+1)} = x_n + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j^{n+0}), i = 1, \dots, s \quad (8.6)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i f(y_j^{n+0}).$$

Valori mari ale pasului Δt_n din metoda $R-K$ (8.2) sau (8.6) conduc la erori de aproximare a soluției problemelor asociate. Valori mici ale pasului măresc acuratețea soluției numerice dar și timpul de calcul. Algoritmii moderni de rezolvare a ecuației diferențiale ordinare controlează mărimea pasului Δt_n pentru a scurta timpul de calcul și pentru a detecta punctele unde schema de calcul aproximează greșit soluția exactă a problemei asociate.

Controlul pasului pentru metoda Runge – Kutta (8.6)

În general, pentru intervale de timp $[0, T]$, algoritmii care controlează pașii metodei (8.6) calculează simultan șirul pașilor $\{\Delta t_n\}$ și pe cel al punctelor de aproximare $\{x_n\}_{n=0}^N$. La timpul $t_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i$, x_n este soluția lui (8.6) cu condiția x_{n-1} de la pasul anterior și aproximează $x(t_n)$ unde x este soluția problemei (8.5).

Convergența metodelor Runge – Kutta cu pas variabil

Ipoteza 2.1. Fie PVI (8.5) în care $f \in C^r(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ și presupunem că f are constanta Lipschitz L într-o vecinătate $V(B, \varepsilon)$ a mulțimii

$$B = \{ \Psi(t, t_0, x_0), t \in [0, T] \}$$

Atunci, pentru orice metodă $R - K$ de ordin r există constantele $K = K(B)$ și $\Delta t_M = \Delta t_M(B)$ astfel încât:

$$\|T(x; \Delta t)\| \leq K \Delta t^{r+1}, \quad \forall x \in V(B, \varepsilon), \quad \Delta t \in (0, \Delta t_M)$$

Terema de convergență a metodelor R – K cu pas variabil (8.6)

Terema 2.9. *În ipotezele 2.1 există $\Delta t_c > 0$ astfel încât pentru șirul pașilor $\{\Delta t_n\}_{n=0}^{N-1}$, unde $\Delta t_n \in (0, \Delta t_c]$, $t_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_c \leq T$ și cel al punctelor $\{x_n\}_{n=0}^N$ calculate cu un algoritm cu pas variabil pentru metoda R – K (8.6) eroarea de discretizare (8.4) satisface relația*

$$\|e_n\| \leq \frac{K}{L} \Delta t_c^r (e^{LT} - 1).$$

Metodă de control al pasului pentru (8.6)

Fie $n \geq 1$. Considerăm șirul de pași $\{\Delta t_0, \Delta t_1, \dots, \Delta t_{n-1}\}$ și punctele de aproximare corespunzătoare $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ astfel încât pentru $i = 1, \dots, n$, la timpul $t_i = \sum_{j=0}^{i-1} \Delta t_j$, x_i este soluția lui (8.6) cu condiția inițială x_{i-1} și aproximează soluția exactă $x(t_i)$ a lui (8.5). Fie x_{n+1} următorul punct calculat de (8.6) cu pasul $\Delta t = \Delta t_n$ și condiția inițială x_n și care aproximează pe $x(t_{n+1})$, unde $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$.

Fie $x_{n+1}^{(2)}$ un alt punct de aproximare pentru $x(t_{n+1})$ pe care îl calculăm executând (8.6) de două ori cu pasul $\frac{\Delta t_n}{2}$.

Astfel, fie $x_{n+1}^{(1)}$ soluția la timpul $t_n + \frac{\Delta t_n}{2}$ cu condiția inițială x_n și $x_{n+1}^{(2)}$ soluția la timpul $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$ cu condiția $x_{n+1}^{(1)}$.

Aproximarea erorii de discretizare la acest pas este

$$e_{n+1}^* = \frac{2^r}{2^r - 1} (x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}^{(1)}) \quad (8.7)$$

și ea este mărginită. Mai precis, avem

$$\|e_n^*\| = \frac{2^{r+1}}{2^r - 1} \frac{K}{L} \Delta t_c^r (e^{Lt_n} - 1)$$

Controlul pasului se face în modul următor. Fie $\delta > 0$ o eroare acceptată. Dacă

$$(i) \quad \|e_{n+1}^*\| > 0.9 \delta \quad (8.8)$$

atunci se refac calculele pentru x_{n+1} și $x_{n+1}^{(2)}$ descrise mai sus dar cu valoarea pasului Δt_n micșorată

$$\Delta t_n = \Delta t_n \left(\frac{0.9 \cdot \delta}{\|e_{n+1}^*\|} \right)^{\frac{1}{r+1}} \quad (8.9)$$

unde r este ordinul metodei $R - K$. Dacă

$$(ii) \quad 0 \leq \|e_{n+1}^*\| \leq 0.9 \delta \quad (8.10)$$

atunci se reține pasul Δt_n și aproximarea

$$x_{n+1} = x_{n+1}^{(2)} + \frac{1}{2^r - 1} (x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}^{(1)}) \quad (8.11)$$

pentru $x(t_{n+1})$. Se trece la pasul următor cu ~~///~~ inițializat după cum urmează. Dacă

$$(iii) \quad 0 \leq \|e_{n+1}^*\| \leq 0.9 \delta \quad (8.12)$$

atunci Δt_{n+1} se mărește față de Δt_n ,

$$\Delta t_{n+1} = \Delta t_n \cdot \left(\frac{\delta}{\|e_{n+1}^*\|} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (8.13)$$

iar dacă $\|e_{n+1}^*\| = 0$ luăm

$$\Delta t_{n+1} = \Delta t_n \quad (8.14)$$

Din cele prezentate rezultă că algoritmul își propune să mențină eroarea de discretizare în limita $\|e_n^*\| \leq \delta$.

Pentru exprimarea algoritmului desemnăm prin $R-K(t, \Delta t, x_n, x_{n+1})$ aplicarea metodei $R-K$ cu pasul Δt astfel încât x_{n+1} este soluție pentru (8.6) la timpul $t + \Delta t$ cu condiția x_n .

$n \leftarrow 0, x_n \leftarrow x_{initial}, \Delta t_n \leftarrow \Delta t_{initial}, t \leftarrow 0$

while ($t \leq T$) **do**

repeat

$R-K(t, \Delta t_n, x_n, x_{n+1})$

$R-K\left(t, \frac{\Delta t_n}{2}, x_n, x_{n+1}^{(1)}\right)$

$R-K\left(t + \frac{\Delta t_n}{2}, \frac{\Delta t_n}{2}, x_{n-1}^{(1)}, x_{n+1}^{(2)}\right)$

$e \leftarrow \frac{2^r}{2^r - 1} \|x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}\|$


```

if ( $e > 0.9 \delta$ ) then  $\Delta t_n \leftarrow \Delta t_n \cdot \left(\frac{0.9 \delta}{e}\right)^{\frac{1}{r+1}}$ 
end_if
until ( $0 \leq e \leq 0.9 \delta$ )
 $x_{n+1} \leftarrow x_{n+1}^{(2)} + \frac{1}{2^r - 1} (x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1})$ 
if  $e > 0$  then  $\Delta t_{n+1} \leftarrow \Delta t_n \cdot \left(\frac{\delta}{e}\right)^{\frac{1}{r}}$ 
else  $\Delta t_{n+1} \leftarrow \Delta t_n$ 
end_if
 $t \leftarrow t + \Delta t_n$ 
 $n \leftarrow n + 1$ 
end_while

```

Algoritmul este finit. Dacă $\Delta t_0 > 0$, atunci din (8.9), (8.13), (8.14) deducem $\Delta t_0 > 0$, $n \in N$ și că există $N \in N$, astfel încât $\sum_{n=0}^{N+1} \Delta t_n \geq 0$.

3. SISTEME DINAMICE

3.1. DEFINIREA SISTEMELOR DINAMICE. CONCEPTE DE BAZĂ

Fie X un spațiu topologic. Considerăm că punctele lui X caracterizează stările unui fenomen și numim X *spațiul fazelor* sau *spațiul stărilor*.

Desemnăm prin X^X mulțimea aplicațiilor spațiului X în el însuși și fie T spațiul R sau Z .

Definiția 3.1. Numim **sistem dinamic**, funcția continuă $\Phi: T \rightarrow X^X$, $\Phi(t) = \varphi_t$ unde pentru orice $t \in T$, $\varphi_t: X \rightarrow X$ este un homeomorfism și

$$(i) \quad \varphi_0 = I_X \text{ (aplicația identică a lui } X \text{)}$$

$$(ii) \quad \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \tag{9.1}$$

Aplicația $\varphi: T \times X \rightarrow X$, $\varphi(t, x) = \varphi_t(x)$ se numește *curent* și este interpretată ca mișcarea în timp a punctelor lui X .

Spațiul $T \times X$ se numește *spațiul fazelor extins*.

Când $T=R$ sistemul se numește *sistem dinamic continuu* iar când $T=Z$ sistemul se numește *sistem dinamic discret*. În ultimul caz, curentul va fi notat cu φ_k , $k \in Z$ unde $\varphi_k = \varphi_1 \circ \varphi_{k-1}$.

Vom defini trei mulțimi importante în spațiul fazelor.

Definiția 3.2. Numim **orbită** cu originea în $x_0 \in X$ sau orbită prin x_0 o submulțime ordonată a spațiului X , $\Gamma(x_0) = \{x \in X : x = \varphi_t(x_0), t \in T\}$.

Observație Noțiunea de orbită este folosită cu precădere în cazul discret, în timp ce în cazul continuu se numește *traietorie de fază*.

Pentru $t \geq 0$ notăm cu $\Gamma^+(x_0)$ orbita pozitivă, iar pentru $t \leq 0$ notăm cu $\Gamma^-(x_0)$ orbita negativă.

Evident $\Gamma(x_0) = \Gamma^-(x_0) \cup \Gamma^+(x_0)$.

Definiția 3.3. Un punct $x_0 \in X$ este **punct de echilibru** (punct fix) pentru un sistem dinamic dacă $\varphi_t(x_0) = x_0$ pentru orice $t \in T$.

Definiția 3.4. Un **ciclu** (sau o orbită periodică) este o orbită L , oricare punct $x \in L$ satisfăcând $\varphi_{t+T_0}(x) = \varphi_t(x)$ pentru orice $t \in T$, $t > 0$. Valoarea $T_0 \in R_+$ (sau N) se numește perioada ciclului.

În continuare considerăm spațiul R^k organizat ca spațiu topologic corespunzător normei euclidiene $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2$ unde $x = (x_1, \dots, x_k) \in R^k$.

Fie funcția vectorială $x : R \rightarrow R^k$, $x = x(t)$.

Notăm cu \dot{x} derivata în raport cu t a lui x , i.e. $\frac{dx}{dt}$.

3.1.1. Legătura dintre sistemele dinamice continue și sistemele de EDO autonome

Considerăm k sistemul de EDO autonome

$$\dot{x} = f(x), f: R^k \rightarrow R^k \quad (9.2)$$

definit de câmpul de vectori $f \in C(R^k, R^k)$.

În anumite condiții, problemei Cauchy pentru (9.2) i se poate asocia univoc un sistem dinamic continuu.

Terema 3.1. *Fie sistemul autonom (9.2) a cărui soluție $x = x(t)$ corespunzătoare datei inițiale x_0 există și este unică pentru orice $x_0 \in R^k$ și $t \in R$. Atunci sistemul dinamic continuu Φ atașat se definește prin $\varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$ și are spațiul fazelor R^k .*

Dimensiunea unui sistem dinamic este egală cu dimensiunea spațiului fazelor.

Dacă sistemul dat este neautonom, i.e.

$$\dot{x} = f(t, x), f: R \times R^k \rightarrow R^k \quad (9.3)$$

unde $x = (x_1, \dots, x_k)$, atunci acesta se poate scrie

$$\dot{x} = f(t, x),$$

$$\frac{dt}{dt} = 1$$

Sau

$$\dot{y} = g(y), g: R^{k+1} \rightarrow R^{k+1} \quad (9.4)$$

unde $g_i(t) = f_i(t), i = 1, \dots, k$ $g_{k+1}(t) = 1$.

Sistemul (9.4) este autonom în funcția necunoscută $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, t)$ și i se asociază un sistem dinamic de dimensiunea $k + 1$.

3.1.1. Legătura dintre sistemele dinamice discrete și ecuațiile recurente

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^k$ și $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f \in C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$. Fie un șir de puncte $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ (sau \mathbb{Z}) care satisfac

$$x_{n+1} = f(x_n), x_0 = x, x \in \mathbb{R}^k \quad (9.5)$$

Teorema 3.2. *Ecuația recurentă (9.5) definește un sistem dinamic discret în mulțimea D dacă oricare ar fi $x \in D$ există pentru (9.5) o soluție $\{x_n\}_{n \geq 0} \subset D$, $x_0 = x$, definită pentru orice $n \geq 0$.*

Observații

1. În general, ecuația (5) se numește sistem dinamic discret.

2. Orbitele unui sistem dinamic discret (SDD) sunt șiruri de puncte în spațiul fazelor, i.e.

$$\Gamma^+(x_0) = \{f^n(x_0)\}_{n \geq 0} = \{x_n\}_{n \geq 0} \quad \text{orbita pozitivă}$$

(9.6)

$$\Gamma^-(x_0) = \{x_n\}_n^0 = -\infty \quad \text{orbita negativă}$$

Secvența din (9.6) este $x_0, f(f(x_0)), \dots$ sau $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0)$.

Definiția 3.5. Un punct $x^* \in R^k$ este **punct fix** al sistemului (9.5) dacă $f(x^*) = x^*$.

Definiția 3.6. Dacă $f^n(x^*) = x^*$ și $f^i(x^*) \neq x^*$ pentru orice $0 < i < n$ atunci punctul x^* se numește **punct periodic** de perioadă n , iar mulțimea $\{x^*, f(x^*), f^2(x^*), \dots, f^{n-1}(x^*)\}$ se numește **orbită periodică** de perioadă n a sistemului (9.5).

De un interes particular este ordinul unui sistem dinamic discret. Sistemul dinamic (9.5) este un sistem de ordinul I în care fiecare punct de secvență depinde doar de punctul anterior. În general, un sistem dinamic discret de ordin n este asociat unei ecuații de forma

$$x_{n+m} = f(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}, \dots, x_n) \quad (9.7)$$

Exemplu

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \\ x_{n+2} = 4x_{n+1} + 4x_n \\ x_{n+1} = 2x_n + 5 \\ x_{n+2} = 4x_{n+1} + 4x_n + 6 \end{cases} \quad (9.8)$$

(9.8)₁ și (9.8)₂ sunt ecuații recurente *omogene* (fără termen liber), iar (9.8)₃ și (9.8)₄ sunt *neomogene*. (9.8)₃ și (9.8)₄ sunt ecuații de ordinul II.

Dacă în (9.5) f nu depinde explicit de n , ecuația se numește *autonomă*. Altfel (ex. $x_{n+1} = n \cdot h(x_n)$) ecuația se numește *neautonomă*.

În continuare ne vom referi la sisteme dinamice discrete generate de ecuații recurente autonome de ordinul 1 și vom considera cazul când $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$.

3.2. SISTEME DINAMICE DISCRETE

Fie sistemul dinamic discret

$$x_{n+1} = f(x_n), x_0 = x, x \in R \quad (10.1)$$

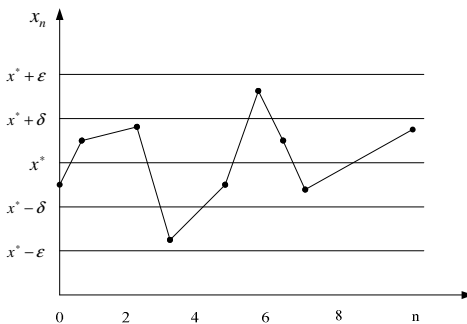
unde $f: D \rightarrow R$, $f \in C(R, R)$ iar $D \subseteq R$.

Si în cazul sistemelor dinamice discrete, de o importanță majoră este stabilitatea/instabilitatea punctelor fixe ale lui (10.1). Fie x^* un punct fix al sistemului (10.1).

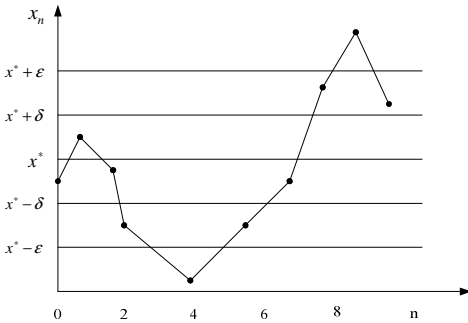
Definiția 3.7. *Punctul fix x^* este **stabil** dacă pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât*

$$\text{dacă } |x_0 - x^*| < \delta \text{ atunci } |f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$$

pentru orice $n > 0$. Dacă x^ nu este stabil atunci el este **instabil**.*

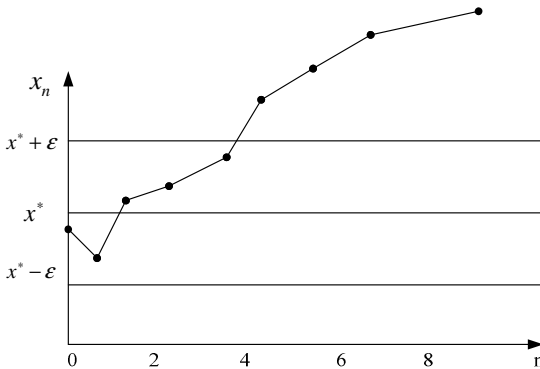


Stabil



Instabil

Definiția 3.8. *Punctul fix x^* este **repulsor** dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât dacă $0 < |x_0 - x^*| < \varepsilon$ atunci $|f(x_0) - x^*| > |x_0 - x^*|$.*

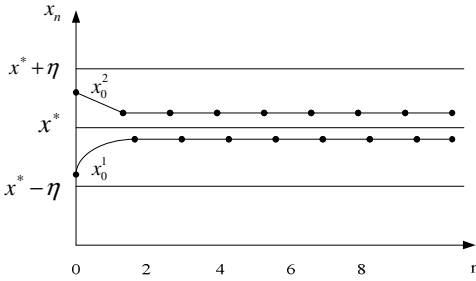


Definiția 3.9. *Punctul fix x^* este **asimptotic stabil** (atractor) dacă este stabil și dacă există $\eta > 0$ astfel încât*

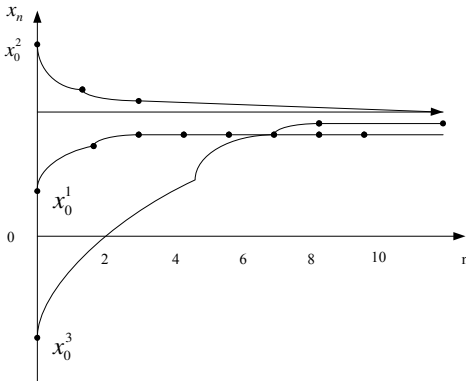
Sisteme Dinamice

dacă $|x_0 - x^*| < \eta$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$

Dacă $\eta = \infty$ atunci x^* este global asimptotic stabil.



Asimptotic stabil



Global asimptotic stabil

Teorema 3.3. Fie x^* un punct fix al sistemului dinamic (10.1) unde f este continuu diferențabilă în x^* . Atunci:

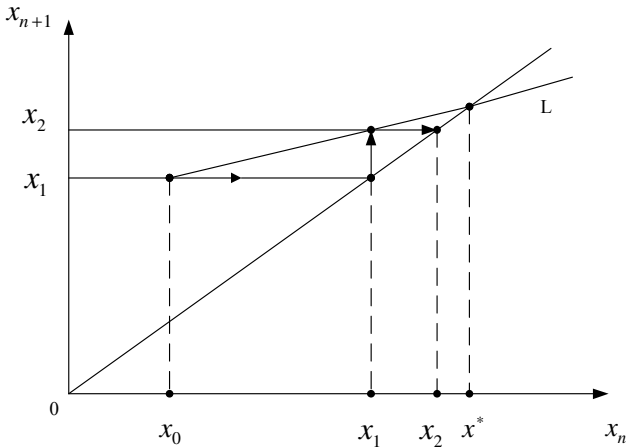
- (i) dacă $|f'(x^*)| < 1$ atunci x^* este asimptotic stabil
(atractor)
- (ii) dacă $|f'(x^*)| > 1$ atunci x^* este instabil și repulsor
- (iii) dacă $|f'(x^*)| = 1$ și

- a) dacă $f''(x^*) \neq 0$ atunci x^* este instabil;
 - b) dacă $f''(x^*) = 0$ și $f'''(x^*) > 0$ atunci x^* este instabil;
 - c) dacă $f''(x^*) = 0$ și $f'''(x^*) < 0$ atunci x^* este asimptotic stabil.
- (iv) dacă $f'(x^*) = -1$ și
- a) dacă $-2f'''(x^*) - 3(f''(x^*))^2 < 0$ atunci x^* este asimptotic stabil;
 - b) dacă $-2f'''(x^*) - 3(f''(x^*))^2 > 0$ atunci x^* este instabil.

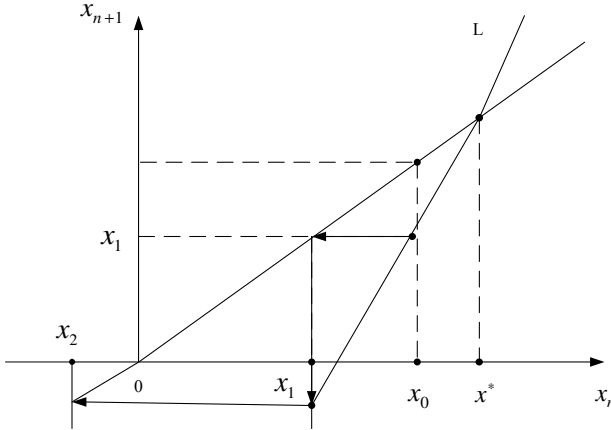
Exemplu 1

Considerăm că sistemul (10.1) este liniar de ordinul 1 (graficul lui f este o dreaptă L). Condiția de punct fix este $x_{n+1} = x_n$, deci prima bisectoare trebuie trasată în desen. Ea va fi notată cu E .

Reprezentăm punctele obținute prin iterarea funcției și prin intersecțiile cu prima bisectoare.



Cazul 1: $0 < \text{panta } (L) < 1$ (Atractor)



Cazul 2: $\text{panta } (L) > 1$ (Repulsor)

Observăm că în cazul 1, panta dreptei L este mai mică decât 1, iar x^* este atractor (prin iterare punctele se apropie de x^*). În cazul 2, panta lui L este mai mare decât 1 iar x^* este repulsor (prin iterare punctele se depărtează de x^*).

Exemplul 2

Fie sistemul dinamic

$$x_{n+1} = -x_n + k \tag{10.2}$$

Calculăm următorii termeni din secvență.

$$x_{n+2} = -x_{n+1} + k = -(-x_n + k) + k = x_n$$

$$x_{n+3} = -x_{n+2} + k = -x_n + k$$

$$x_{n+4} = -x_{n+3} + k = -(-x_n + k) + k = x_n$$

Dacă x_0 este o valoare inițială, atunci:

$$x_0 = x_2 = x_4 = \dots\dots$$

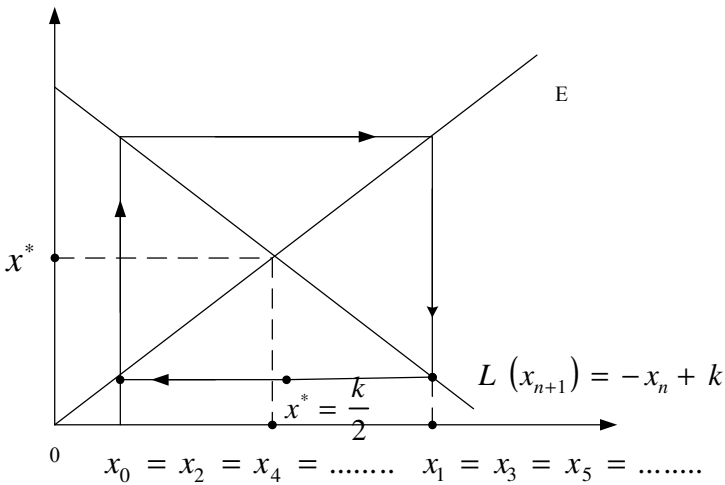
și

$$x_1 = x_3 = x_5 = \dots\dots$$

Punctul fix este:

$$x^* = -x^* + k \Rightarrow x^* = \frac{k}{2}$$

Spunem că sistemul posedă un ciclu de perioadă 2. El oscilează între valorile x_0 și $-x_0 + k$. Punctul fix x^* nu este nici atractor, nici repulsor. Mai observăm că panta lui L este -1 .



În general, spunem că sistemul (10.1) este periodic dacă

$$x_{n+m} = x_n \tag{10.3}$$

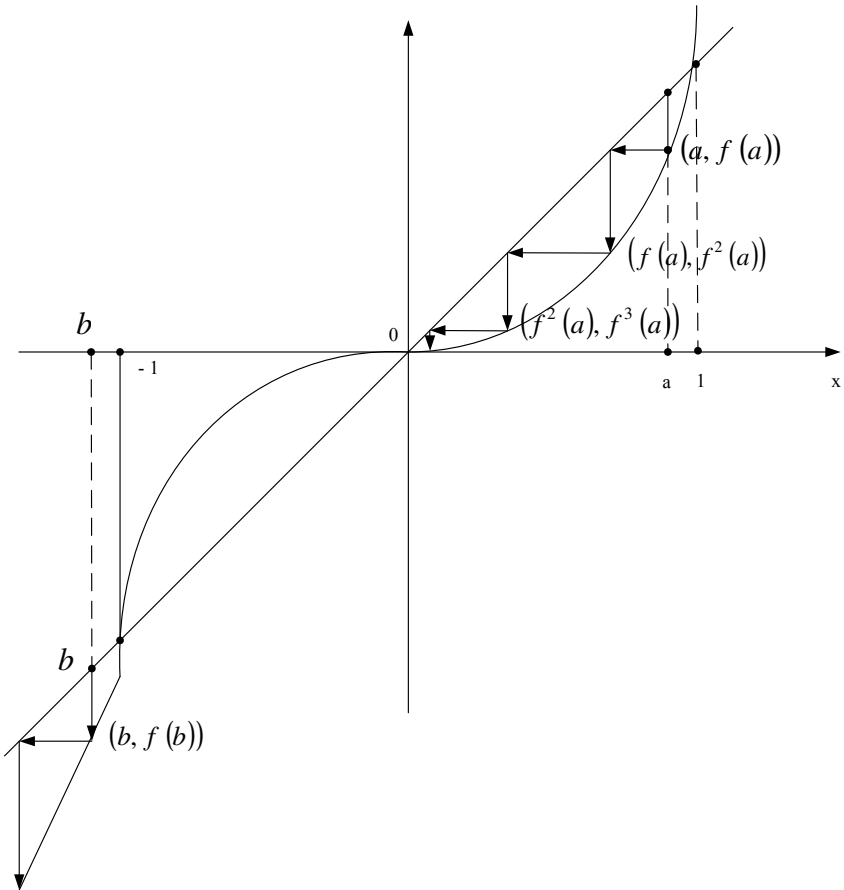
pentru un $m \in \mathbb{N}$ fixat și pentru toți $n \in \mathbb{N}$. Valoarea cea mai mică a lui m pentru care este îndeplinită (10.3) se numește *perioada soluției*.

Definiția 3.10. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție reală și x^* un punct periodic al lui f de perioadă k . Atunci x tinde asimptotic către x^* dacă secvența $x, f^k(x), f^{2k}(x), f^{3k}(x), \dots$ converge la x^* . Cu alte cuvinte, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(x) = x^*$. Notăm cu $W^S(x^*)$ mulțimea stabilă a lui x^* și aceasta constă din toate punctele care tind asimptotic către x^* .

Dacă secvența $|x|, |f(x)|, |f^2(x)|, |f^3(x)|, \dots$ este fără limită, atunci x tinde asimptotic la ∞ . Mulțimea stabilă a lui ∞ o notăm cu $W^S(\infty)$ și ea constă din toate punctele care tind asimptotic la ∞ .

Observație Dacă p și q sunt două puncte periodice distincte ale lui f , atunci $W^S(p) \cap W^S(q) = \Phi$.

Exemplu 1 Fie ecuația recurentă $x_{n+1} = x_n^3$, $n \in \mathbb{N}$. Funcția f este $f(x) = x^3$. Punctele fixe sunt date de $x = f(x) \Rightarrow x \in \{0, -1, 1\}$.



Considerăm un punct $a \in (0,1)$ și luăm punctul corespunzător de pe prima bisectoare (care caracterizează proprietatea $x_{n+1} = x_n$). Observăm că prin iterarea lui f , $f^n(a) \rightarrow 0$.

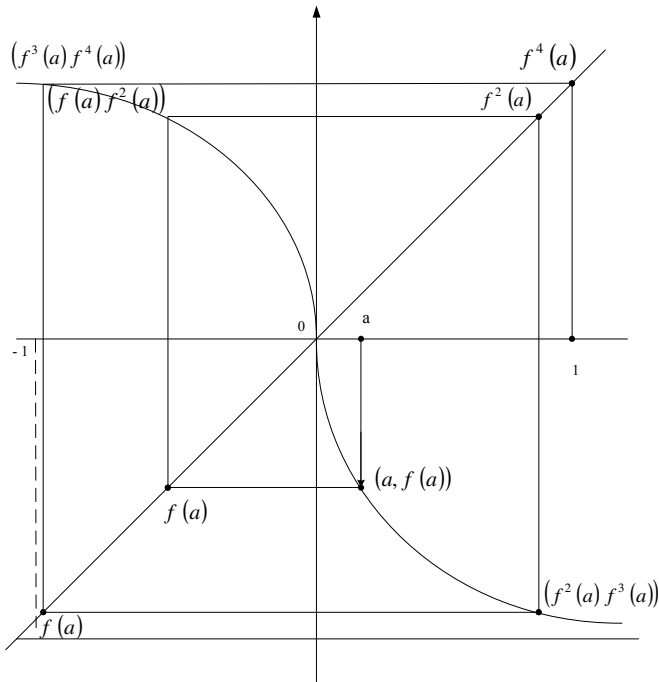
Sisteme Dinamice

Se poate constata că $W^S(0) = (-1, 1)$. Dacă $b \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ atunci $b \in W^S(\infty) \Rightarrow W^S(\infty) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Exemplul 2 $x_{n+1} = -x_n^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = 0$ este un punct fix.

Observăm că:
$$\begin{cases} f(1) = -(1)^{\frac{1}{3}} = -1 \\ f(-1) = -(-1)^{\frac{1}{3}} = -(-1) = 1 \end{cases}$$

Deci $\{-1, 1\}$ formează o orbită periodică de perioadă 2.



$$\text{Se observă că } \begin{cases} W^S(1) = (0, \infty) \\ W^S(-1) = (-\infty, 0) \\ W^S(\infty) = \Phi \end{cases}$$

Temă:

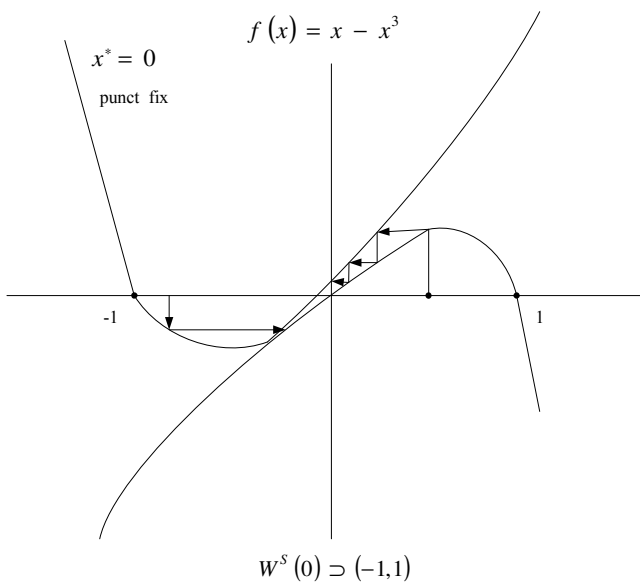
1. $x_{n+1} = |x_n - 1| \cdot \frac{1}{2}$ este un punct fix. Să se determine $W^S = \left(\frac{1}{2}\right)$.
2. $x_{n+1} = -x_n^3$
 $W^S(1) = ?$
 $W^S(-1) = ?$

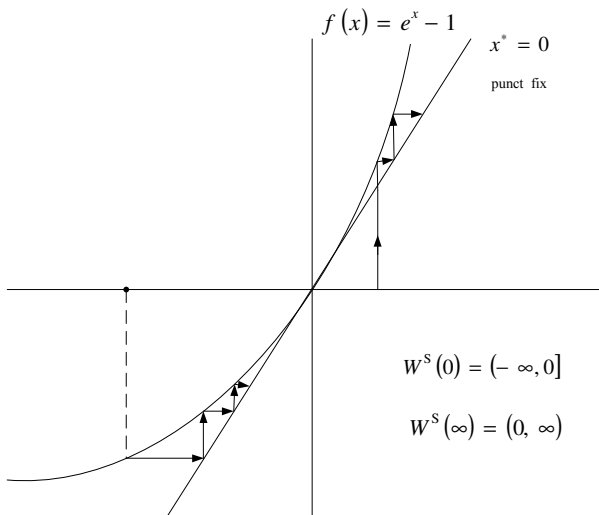
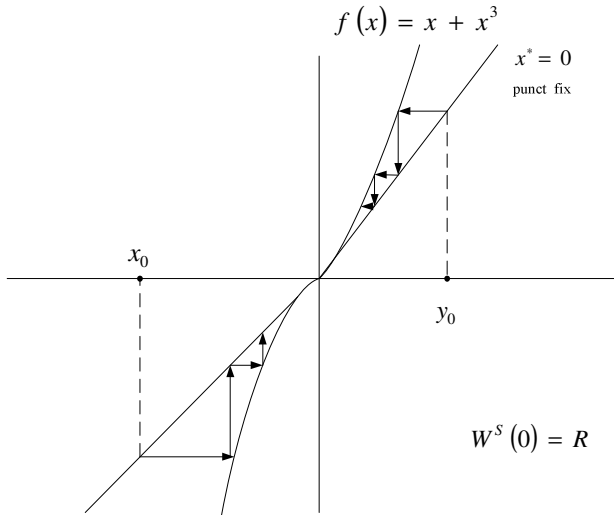
Teorema 3.4. Fie $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ și fie x^* un punct fix al lui f . Atunci:

- (i) dacă $|f'(x^*)| < 1$ există un interval deschis U astfel încât $x^* \in U$ și $U \subset W^S(x^*)$;
- (ii) dacă $|f'(x^*)| > 1$ există un interval deschis U astfel încât $x^* \in U$ și $U \subset W^S(\infty)$.

Observație În cazul când $|f'(x^*)| = 1$ nu se poate spune nimic precis despre mulțimile stabilă și instabilă a lui x^* .

Sisteme Dinamice





Terema 3.5. Fie $f \in C'(R, R)$ și x^* un punct periodic al lui f de primă perioadă k . Atunci:

(i) dacă $\left| (f^k)'(x^*) \right| < 1$ există un interval deschis U care îl conține pe x^* , astfel încât $U \subset W^S(x^*)$;

(ii) dacă $\left| (f^k)'(x^*) \right| > 1$ există un interval deschis U care îl conține pe x^* , astfel încât $U \subset W^S(\infty)$.

Definiția 3.11. Fie x^* un punct periodic al lui f cu primă perioadă k . Dacă $\left| (f^k)'(x^*) \right| < 1$ atunci x^* punct periodic atractiv. Dacă $\left| (f^k)'(x^*) \right| > 1$ atunci x^* punct periodic repulsor.

Punctele fixe pentru care $\left| (f^k)'(x^*) \right| \neq 1$ se numesc *puncte fixe hiperbolice*. Evident, dacă $\left| (f^k)'(x^*) \right| < 1$ sunt puncte fixe hiperbolice atrătoare, iar dacă $\left| (f^k)'(x^*) \right| > 1$ sunt puncte fixe hiperbolice repulsoare.

3.2.1. Funcții recursive parametrizate. Bifurcații

Considerăm sistemele dinamice discrete de forma:

$$x_{n+1} = f_c(x_n) \quad , \quad x_0 \in R$$

unde funcția $f_c : R \rightarrow R$ depinde de parametrul $c \in R$.

Există situații în care schimbări ale valorilor parametrului aduc schimbări în dinamica sistemului. Numim astfel de schimbări *bifurcații*.

Definiție 3.12. Fie $f_c(x)$ o familie de funcții parametrizate. Spunem că există o bifurcație pentru valoarea c_0 a parametrului dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât ori de câte ori

$$c_0 - \varepsilon < a < c_0 \quad \text{și} \quad c_0 < b < c_0 + \varepsilon$$

dinamica lui $f_a(x)$ este diferită de dinamica lui $f_b(x)$. Cu alte cuvinte, dinamica funcției se schimbă când parametrul trece prin valoarea c_0 .

Există mai multe tipuri de bifurcații.

Bifurcația șa – nod

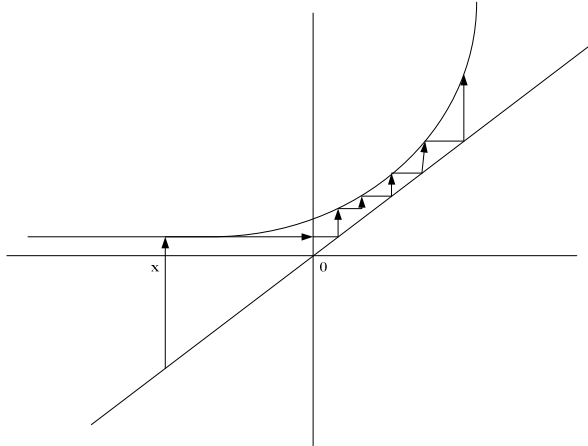
Considerăm familia de funcții $f_c(x) = e^{x+c}$ și vom analiza dinamica acesteia utilizând reprezentări grafice. Vom observa că dinamica funcției se schimbă atunci când parametrul c trece prin valoarea $c = -1$. Vom avea trei situații diferite când $c < -1$, $c = -1$, $c > -1$.

Cazul $c < -1$

1. Sunt două puncte fixe $0 < a < b$. Punctul a este atractor, iar b este repulsor. Se poate observa aceasta din dinamica punctelor iterate dar și din $0 < f'_c(a) < 1$, $f'_c(b) > 1$. Evident, cele două puncte fixe sunt hiperbolice.

2. Cele două puncte fixe se transformă într-unul singur, $x^* = 1$, iar acesta nu este hiperbolic pentru că $f'_{-1}(1) = 1$. Analiza grafică arată că $W^s(1) = (-\infty, 1]$, $W^s(\infty) = (1, \infty)$.

Cazul $c > -1$.

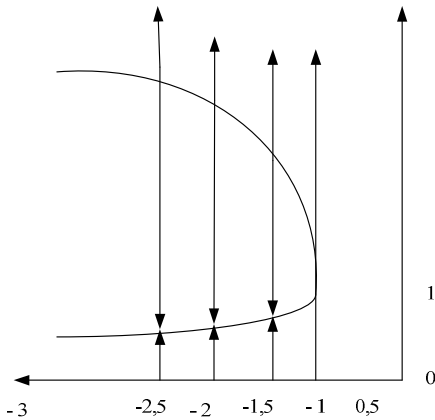


3. Nu mai sunt intersecții între graficul lui $f_c(x)$ și $y=x$. Rezultă că nu mai sunt puncte fixe după cum arată și analiza grafică. Avem $W^s(\infty) = \mathbb{R}$.

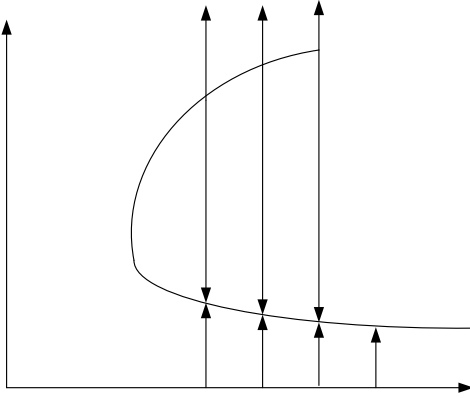
O *diagramă de bifurcație* este un graf al punctelor periodice reprezentat ca funcție de parametru. Valorile

Sisteme Dinamice

punctelor periodice sunt considerate pe axa verticală, iar valorile parametrului pe axa orizontală. În cazul nostru, vom desemna punctele fixe prin linii (curbe) continue. Adăugăm săgeți verticale care să sugereze dacă un punct fix este atractor sau repulsor.



O primă bifurcație șă-nod este cea care apare în cazul nostru. Două puncte fixe se transformă într-unul singur, apoi, când $c > -1$ dispare și acesta (figura din stânga). Există și o situație inversă. De la o dinamică fără puncte periodice, la o anumită valoare de parametru apare un punct periodic, iar apoi acesta se desparte în altele două (figura următoare).



Bifurcația furcă

Fie familia de funcții $f_c(x) = c \cdot \arctan(x)$.

Când $0 < c < 1$ funcția f_c are un punct fix foarte aproape de 0 și avem $W^s(0) = \mathbb{R}$. Când $c = 1$ avem în continuare $W^s(0) = \mathbb{R}$ deși $f'_c(0) = 1$ (nu mai este hiperbolic). Când $c > 1$ punctul fix 0 rămâne, dar se transformă în repulsor. Apar două noi puncte fixe care sunt atrătoare (a și b). Avem $W^s(a) = (-\infty, 0)$, $W^s(b) = (0, \infty)$.

Cazurile $0 < c < 1$ și $c = 1$

Sisteme Dinamice

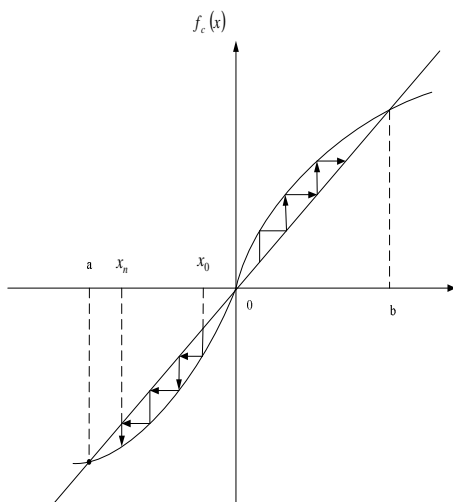
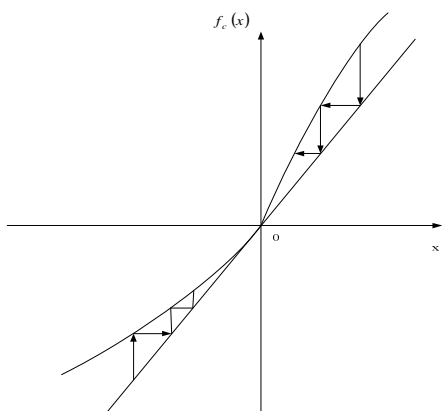
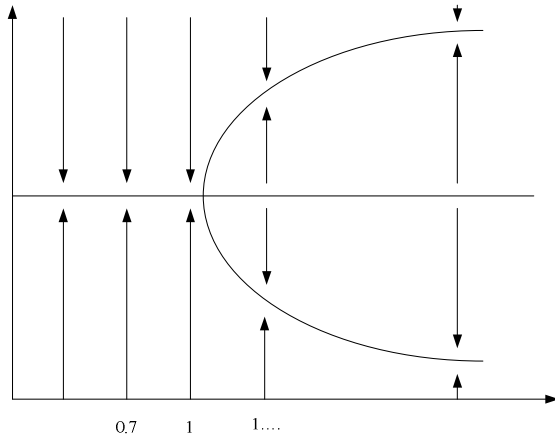
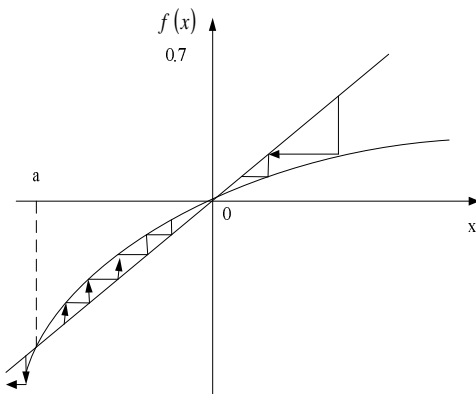


Diagrama de bifurcație este următoarea

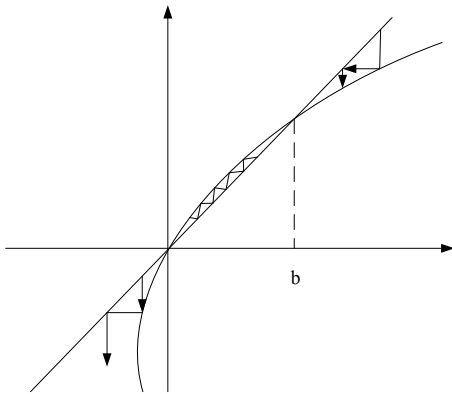
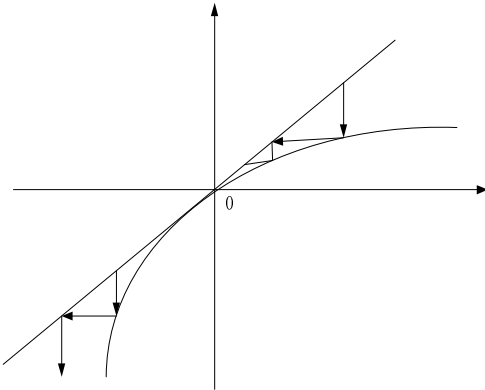


Bifurcația transcritică

Considerăm familia $f_r(x) = rx(1 - x)$. Considerăm valori ale parametrului r apropiate de 1, $r = 0,78$, $r = 1$, $r = 1,3$.



Sisteme Dinamice

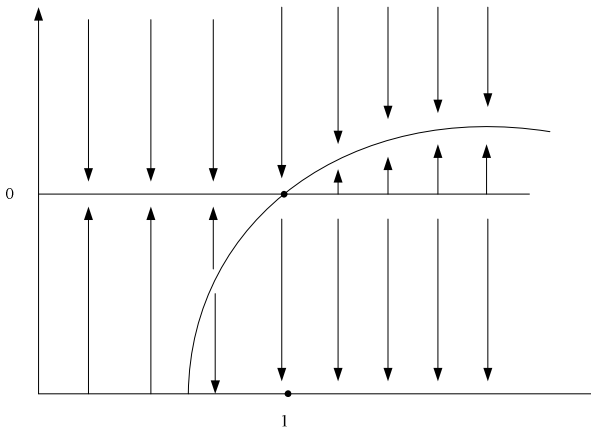


$r < 1$: Două puncte fixe: a repulsor 0 atractor,
 $W^s(0) = (a, \infty)$.

$r = 1$: Un singur punct fix 0 care este repulsor
pentru $x \in (-\infty, 0)$ și atractor pentru
 $x \in (0, \infty)$.

$r = 1.3$: Două puncte fixe. 0 este repulsor și b este atractor, $W^s(b) = (0, \infty)$.

Diagrama de bifurcație este următoarea



Temă

$$f_r(x) = rx - r^3 \text{ pentru } r = 1.$$

$$f_m(x) = x^3 + mx, \quad m = 1, \quad m = -1.$$

3.3. STUDIUL STABILITĂȚII SISTEMELOR DINAMICE CONTINUE

În studiul sistemelor dinamice, obiectivul de bază îl reprezintă posibilitatea de a prevedea comportamentul în viitor a sistemului fizic modelat, în principal la timpi mari. Un rol important îl joacă stabilitatea soluțiilor și a mulțimilor invariante.

Fie ecuația diferențială

$$\dot{x} = f(x), \quad (11.1)$$

unde $f: W \rightarrow R^k$, $W \subset R^k$ deschisă și considerăm $f \in C^1$.

Pentru $x_0 \in W$, fluxul $\varphi: R \times W \rightarrow R^k$ se definește prin $\varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$ și este soluția lui (11.1) care trece prin x_0 la momentul $t = 0$.

Fie $x(t)$ o soluție pentru (11.1).

Definiția 3.13. $x(t)$ este **stabilă** (sau **Liapunov stabilă**) dacă pentru $\varepsilon > 0$ dat, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, pentru orice altă soluție $y(t)$ a lui (11.1) care satisface $|x(t_0) - y(t_0)| < \delta$, avem $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ pentru $t > t_0$, $t_0 \in R$.

Cu alte cuvinte, $x(t)$ este stabilă dacă soluțiile care pleacă de lângă ea la un timp dat, rămân aproape de ea la toți timpii următori. O soluție care nu este stabilă este *instabilă*.

Definiția 3.14. $x(t)$ este **asimptotic stabilă** dacă este Liapunov stabilă și pentru orice altă soluție $y(t)$ a lui (11.1) există o constantă $b > 0$ astfel încât dacă $|x(t_0) - y(t_0)| < b$, atunci $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0$.

Cu alte cuvinte $x(t)$ este asimptotic stabilă dacă soluțiile învecinate, nu neapărat rămân aproape de ea, dar converg la $x(t)$ pentru $t \rightarrow \infty$.

3.3.1. Liniarizare și hiperbolicitate

Fie x^* un punct de echilibru pentru (11.1).

Funcția constantă $x(t) = x^*$ este soluție pentru (11.1) și prin unicitatea soluțiilor nu există o altă curbă-soluție care să treacă prin x^* . În acest caz $\varphi_t(x^*) = x^*$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Din această cauză pentru punctul x^* se mai folosesc și denumirile "punct staționar" sau "punct fix" al fluxului.

În continuare considerăm

$$Df(x) = \left(\frac{\delta f_i}{\delta x_j}(x) \right)_{i,j=\overline{1,k}}, \quad x \in \mathbb{R}^k$$

Jacobianul lui f în punctul $x \in \mathbb{R}^k$. Mai numim $Df(x)$ și forma liniară a lui f în punctul x unde $Df(x) = A$ este o matrice de ordin $k \times k$.

Observație Dacă $x_0 \in \mathbb{R}^k$ este un punct fix pentru (11.1), printr-o schimbare de coordonate acesta poate fi deplasat în origine.

Dacă $Df(0)$ este Jacobianul lui f evaluat în $x = 0$ atunci, folosind o dezvoltare a lui f în serii Taylor în jurul originii, sistemul (11.1) se scrie:

$$\dot{x} = Df(0)x + O(|x|^2)$$

Ignorând termenul în $|x|^2$ asociem lui (11.1) sistemul liniar

$$\dot{x} = Df(0)x, x \in \mathbb{R}^k \quad (11.2)$$

Definiția 3.15. Dacă $Df(x^*)$ nu are valori proprii cu partea reală zero, punctul de echilibru x^* se numește **hiperbolic**.

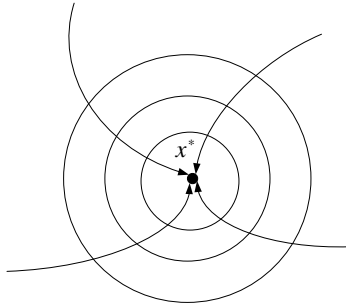
Definiția 3.16. Dacă toate valorile proprii ale matricei $A \equiv Df(x^*)$ au partea reală strict negativă, numim x^* punct **absorbant**. Dacă valorile proprii au partea reală strict pozitivă, x^* se numește **sursă**. Dacă se întâlnesc ambele semne, punctul se numește punct **șa**.

O proprietate importantă a punctelor x^* absorbante este următoarea: soluțiile învecinate lui x^* tind exponențial către x^* . Această proprietate este precizată de următoarea teoremă.

Teorema 3.6. Fie $x^* \in W$ un punct absorbant pentru (11.1). Presupunem că toate valorile proprii au partea reală

mai mică decât $-c$, $c > 0$. Atunci există o vecinătate $U \subset W$ cu $x^* \in U$ astfel încât:

- a) $\varphi_t(x)$ este definit în U pentru $\forall x \in U$ și $t > 0$;
- b) $|\varphi_t(x) - x^*| < e^{-tc} |x - x^*|$, $\forall x \in U$ și $t \geq 0$;
- c) $\exists B > 0$ constant astfel încât $|\varphi_t(x) - x^*| < B e^{-tc} |x - x^*|$, $\forall x \in U$ și $t \rightarrow \infty$.



În cazul unui punct absorbant toate traiectoriile se îndreaptă spre interiorul sferelor din jurul lui x^* .

Exemplu, Mișcarea în plan vertical a unui pendul

Considerăm în plan vertical un fir de lungime l la capătul căruia se află un obiect punctiform de masă m . Fie $\theta(t)$ unghiul în plan vertical (sensul pozitiv este cel invers acelor de ceasornic) la momentul t . Viteza unghiulară este $\frac{d\theta}{dt}$ iar viteza este $l \cdot \frac{d\theta}{dt}$. Forța de frecare este $-k \frac{d\theta}{dt}$, unde $k > 0$ este o constantă. Această forță este tangent cercului de rază l pe care se mișcă pendulul.

Sisteme Dinamice

Forța gravitațională *nu* are componenta $-m \cdot \sin \theta(t)$ tangentă la cerc. Forța totală tangentă la cerc la momentul t este $F = - \left(kl \frac{d\theta}{dt} + m \sin \theta \right)$. Accelerația este

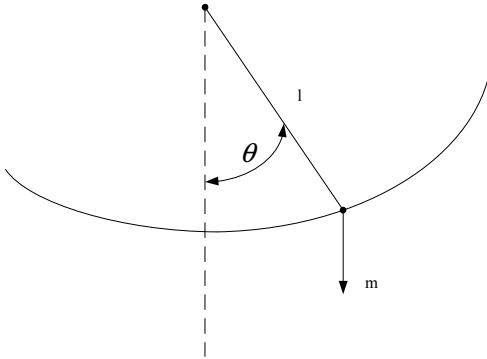
$$a = l \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Din legea lui Newton $a = \frac{F}{m}$ avem:

$$l\theta'' = - \frac{kl}{m}\theta' - \sin \theta$$

sau

$$\theta'' = - \frac{kl}{m}\theta' - \frac{1}{e} \sin \theta$$



Fie o nouă variabilă $\omega = \theta'$, viteza unghiulară. Ecuația precedentă este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \theta' = \omega \\ \omega' = -\frac{1}{l} \sin \theta - \frac{k}{m} \omega \end{cases}$$

Punctele de echilibru sunt $(\theta, \omega) = (n, \pi, 0)$,
 $n = 0, \pm 1, \pm 2$.

Ne concentrăm asupra punctului $(0, 0)$.

Câmpul de vector f este
 $f(\theta, \omega) = \left(\omega, -\frac{1}{l} \sin \theta - \frac{k}{m} \omega \right)$.

Are derivata în (θ, ω) ,

$$Df(\theta, \omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{l} \cos \theta & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

și. Prin evaluarea în $(0, 0)$,

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{l} \cos \theta & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \text{ care are valorile proprii}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ -\frac{k}{m} \pm \left[\left(\frac{k}{m} \right)^2 - \frac{4}{l} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Partea reală $-\frac{k}{2m}$ este negativă deoarece $k > 0$,
 $m > 0$. Punctul de echilibru $(0, 0)$ este absorbant. Ca
 urmare, pentru unghiuri inițiale suficient de mici și viteze
 unghiulare mici, pendulul tinde spre poziția de echilibru
 $(0, 0)$.

Problema stabilității soluției $\bar{x}(t)$ a lui (11.1) presupune parcurgerea următorilor doi pași

1. Se determină dacă soluția $x=0$ a lui (11.2) este stabilă;
2. Se arată că stabilitatea soluției $x=0$ a lui (11.2) implică stabilitatea soluției $\bar{x}(t)$ a lui (11.1).

Pasul 1 poate fi la fel de dificil ca în cazul problemei originale (11.1) deoarece, pentru sistemele liniare a căror coeficienți sunt funcții dependente de timp, nu există metode analitice generale care să permită determinarea soluției. Totuși, vom vedea mai târziu că pentru soluțiile echilibru ale lui (11.1), i.e. $\bar{x}(t) = \bar{x}$, se poate trage o concluzie pe baza stabilității din cazul sistemului liniarizat asociat (11.2).

În continuare dorim să găsim o schimbare locală de coordonate $x = h(y)$ care, într-o vecinătate a originii, să transforme orbitele fluxului neliniar (11.1) în cele ale fluxului liniar asociat (11.2).

Fie U o vecinătate a unui punct fix x pentru (11.1). Prin analogie cu varietățile invariante din cazul liniar definim

$$W_{loc}^S(x) = \left\{ y \in U \mid \varphi(y, t) \rightarrow x, t \rightarrow \infty, \varphi(y, t) \in U \right\}_{t \geq 0}$$

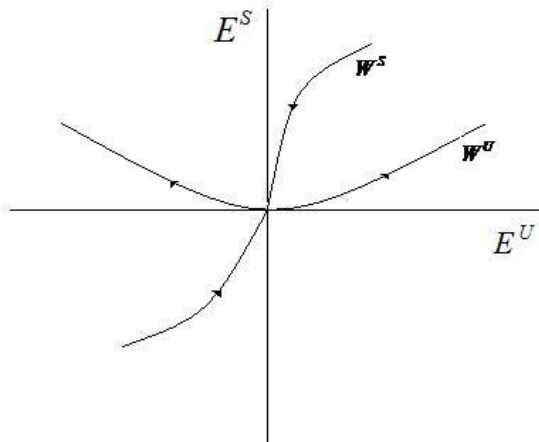
$$W_{loc}^S(x) = \left\{ y \in U \mid \varphi(y, t) \rightarrow x, t \rightarrow -\infty, \varphi(y, t) \in U \right\}_{t \leq 0}$$

Următoarea teoremă arată că aceste varietăți există și sunt de aceeași dimensiune ca varietățile corespunzătoare din cazul liniar asociat

$$\dot{y} = Df(x)y,$$

unde x este punct fix hiperbolic. Mai mult, varietățile din cazul nelinier sunt tangente la varietățile din cazul liniar.

Teorema 3.7. *Presupunem că originea este un punct fix hiperbolic pentru ecuația $\dot{x} = f(x)$ iar E^S și E^U sunt varietățile stabilă și instabilă ale sistemului liniarizat $\dot{x} = Df(0)x$. Atunci există o varietate locală stabilă și alta instabilă $W_{loc}^S(0)$, $W_{loc}^U(0)$ de aceeași dimensiuni cu E^S și respectiv E^U . Aceste varietăți sunt respectiv tangente la E^S și E^U în origine.*



Punctul fix hiperbolic x_0 este "absorbant" dacă $Df(x_0)$ are toate valorile proprii cu partea reală strict negativă. Punctul x_0 este "sursă" dacă toate valorile proprii ale lui

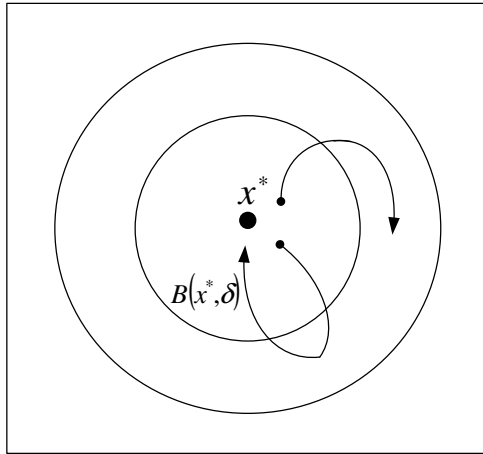
$Df(x_0)$ au partea reală strict pozitivă. Altfel x_0 este "punct șa".

Teorema 3.8. (Hartman-Grobman) Fie ecuația (11.1). Dacă $x = 0$ este punct fix hiperbolic atunci există o aplicație continuă și inversabilă h , definită într-o vecinătate a lui $x = 0$ care transformă orbitele fluxului nelinier în cele ale fluxului liniar $\exp(t \cdot Df(0))$. Această aplicație poate fi aleasă astfel încât parametrizarea orbitelor prin timp este păstrată.

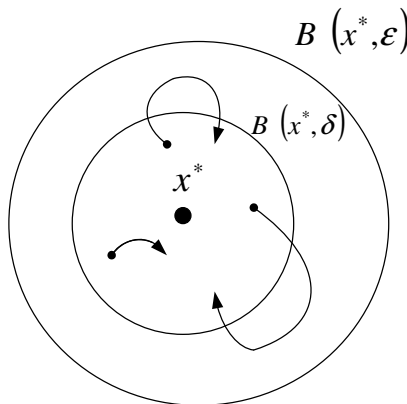
3.3.2. Stabilitatea punctelor de echilibru

Notăm cu $B(x, r)$ bila centrată într-un punct $x \in R^k$ și de rază r .

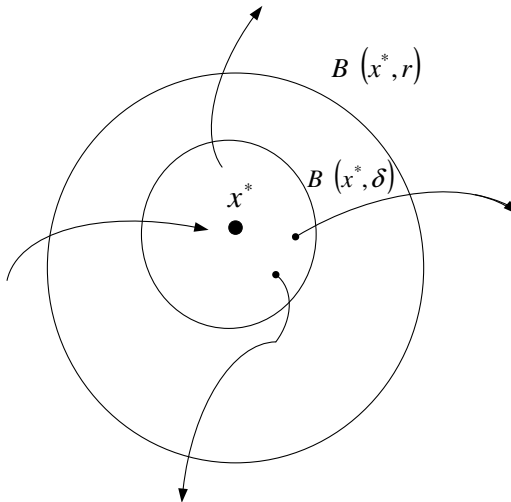
Definiția 3.17. Spunem că punctul de echilibru x^* este **stabil** dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât dacă $x \in B(x^*, \delta)$ atunci $\varphi_t(x) \in B(x^*, \varepsilon)$ pentru orice $t \geq 0$. Dacă în plus avem $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_t(x) - x^*| = 0$ spunem că punctul de echilibru x^* este **atractiv**, iar dacă egalitatea cu zero a limitei este adevărată pentru $t \rightarrow -\infty$ spunem că punctul x^* este **repulsiv**. Un punct de echilibru care este stabil și atractiv este **asimptotic stabil**. Dacă punctul de echilibru nu este stabil, el se numește **instabil**.



Stabilitate



Stabilitate asimptotică



Instabilitate

Există o vecinătate $B(x, r)$ astfel încât pentru orice vecinătate $B(x, \delta)$ a lui x^* există măcar o soluție $x(t)$ cu punctul inițial $x(0) \in B(x^*, \delta)$ care părăsește $B(x^*, r)$.

Un punct absorbant este asimptotic stabil și deci este și stabil.

Un punct șa este instabil. Același lucru se poate spune și despre o sursă.

Un exemplu de punct de echilibru care este stabil dar nu și asimptotic stabil. Fie ecuația liniară $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}$, unde A are valori proprii pur imaginare. Toate orbitele sunt elipse. Originea $(0,0)$ este punct stabil dar, evident, nu este și asimptotic stabil.

Din cele spuse până acum rezultă că un punct de echilibru hiperbolic este sau instabil sau asimptotic stabil.

Terema 3.9. Fie $W \subset R^k$ o mulțime deschisă și $f : W \rightarrow R^k$ continuu diferentiabilă. Presupunem că x^* este un punct de echilibru stabil pentru ecuația $\dot{x} = f(x)$. Atunci $Df(x^*)$ nu are valori propri cu parte reală pozitivă.

Exerciții

1. Fie sistemul:

$$\dot{x} = Ax$$

cu A operator în R^k . Fie $0 \in R^k$ punctul de echilibru. Să se determine în care dintre cazurile următoare 0 este punct stabil.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; 3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Fie sistemul:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y - 1) \\ \dot{y} = 3x - 2y + x^2 - 2y^2 \end{cases} \quad (11.3)$$

Să se determine punctele de echilibru și dacă acestea sunt stabile sau instabile.

Rezolvare Punctele de echilibru sunt caracterizate de $\dot{x} = 0$ și $\dot{y} = 0$. Din (11.3₁) $\Rightarrow x = 0$ și $y = 1$.

Substituind $x = 0$ în (11.3₂) și considerând $\dot{y} = 0$, obținem $y = 0$, $y = -1$.

Substituind $y = 1$ obținem $x = -4$ și $x = 1$.

Punctele de echilibru sunt:
 $(x, y) = (0, 0), (0, -1), (-4, 1), (1, 1)$.

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} y - 1 & x \\ 3 + 2x & -2 - 4y \end{pmatrix}$$

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 + 2x & -2 - 4y \end{pmatrix}$$

au valori proprii -1 și -2 . Deci $(0, 0)$ este asimptotic stabil.

Să se arate că în cazul celorlalte 3 puncte de echilibru Jacobianul are valori proprii, una pozitivă și alta negativă.

În acest caz punctele de echilibru sunt instabile.

$$3. \begin{cases} \dot{x} = y + a \left(\frac{1}{3} x^2 - x \right) \\ \dot{y} = -x \end{cases}, \quad a > 0$$

Evident, $(x, y) = (0, 0)$ este un punct de echilibru.

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} a(x^2 - 1) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{\textit{și}} \quad Df(0, 0) = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{cu}$$

ecuația caracteristică $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$ și valori propri $\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 4}$. Cum $a > 0$, rezultă că $(0, 0)$ este asimptotic stabil dacă $a \neq 2$.

4. Să se arate că $(x, y) = (0, 0)$ este punct de echilibru asimptotic stabil pentru sistemul

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y + x^2 - 4xy \\ \dot{y} = 2x - 4y + 2x^2 - 3xy + 8y^2 \end{cases}$$

Răspunsul la pasul doi din problema stabilității soluției $\bar{x}(t)$ a lui (11.1), enunțată în paragraful anterior, este dat de următoarea teoremă.

Teorema 3.10. *Fie sistemul (11.1). Presupunem că toate valorile propri ale lui $Df(x^*)$ au partea reală strict negativă. Atunci soluția echilibru $x = x^*$ a lui (11.1) este asimptotic stabilă.*

3.3.3. Funcții Lyapunov. O altă modalitate pentru studiul stabilității

Există și o altă modalitate de studiu al stabilității unui punct de echilibru al sistemului dinamic continuu asociat lui (11.1). Este vorba de folosirea *funcțiilor Lyapunov*.

Dacă funcția f din (11.1) este definită pe mulțimea deschisă $W \subset R^k$ considerăm o vecinătate $U \subset W$ a punctului de echilibru x^* și fie $V: U \rightarrow R$ o funcție diferențiabilă. Notăm prin $\dot{V}: U \rightarrow R$ funcția definită prin $\dot{V}(x) = DV(x)(f(x))$.

Prin $DV(x)$ desemnăm operatorul de diferențiere aplicat vectorului $f(x)$.

Dacă $\varphi_t(x)$ este soluția sistemului dinamic continuu asociat lui (11.1) care trece prin x la timpul $t = 0$, atunci

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\varphi_t(x)) \Big|_{t=0}$$

Dacă $\dot{V}(x)$ este negativă atunci V este descrescătoare de-alungul soluției (11.1) prin x .

Teorema 3.11. (Lyapunov) Fie $x^* \in W$ un punct de echilibru pentru (11.1). Fie $V: U \rightarrow R$ o funcție continuă, diferențiabilă în $U \setminus \{x^*\}$ astfel încât:

a) $V(x^*) = 0$ și $V(x) > 0$ dacă $x \neq x^*$;

b) $\dot{V}(x) \leq 0$ pentru $x \in U \setminus \{x^*\}$.

Atunci x^* este stabil. În plus, dacă

c) $\dot{V}(x) < 0$ pentru $x \in U \setminus \{x^*\}$

atunci x^* este asimptotic stabil.

Exemplul 1 Fie sistemul dinamic în R^3 descris de

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(z-1) \\ \dot{y} = -x(z-1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases}$$

Evident, axa z , $\{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$ constă în întregime din puncte de echilibru pentru sistem. Considerăm punctul $(0, 0, 0)$.

Fie:

$$V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 \quad \text{cu } a, b, c > 0$$

$$\dot{V}(x, y, z) = 2 \left(ax\dot{x} + by\dot{y} + cz\dot{z} \right)$$

și

$$\frac{1}{2} \dot{V}(x, y, z) = 2axy(z-1) - bxy(z-1) - cz^4.$$

Dacă luăm $c = 1$ și $2a = b$ avem $\dot{V}(x, y, z) \leq 0$. Deci $V(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$ este funcție Lyapunov și $(0, 0, 0)$ este stabil. Cum $\dot{V} < 0$ punctul $(0, 0, 0)$ este asimptotic stabil.

Exemplul 2 Fie sistemul dinamic în R^2 asociat sistemului de EDO

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + x^2 - 2xy \\ \dot{y} = -2y - 5xy + y^2 \end{cases}$$

Sisteme Dinamice

Originea $(0, 0)$ este punctul de echilibru. Fie

$$V(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

$$\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = -x^2(1 - x + 2y) - y^2(2 + 5x - y)$$

Deoarece într-o vecinătate a lui $(0, 0)$ expresiile $(1 - x + 2y)$ și $(2 + 5x - y)$ sunt pozitive, rezultă că $V(x, y)$ este funcție Lyapunov.

Vecinătatea lui $(0, 0)$ este dată de regiunea

$$\{(x, y) \mid x - 2y < 1, 5x - y < 2\}.$$

3.4. COMPORTAMENT ASIMPTOTIC

Considerăm în continuare EDO (11.1).

3.4.1. Mulțimi invariante și mulțimi limită

Definiția 3.17. Fie Φ sistemul dinamic continuu generat de (11.1). Mulțimea $B \subset R^k$ se numește **invariantă** pentru sistemul dinamic Φ dacă $\varphi_t(x) \in B$ pentru orice $x \in B$ și orice $t \in R$.

Din definiția punctului de echilibru rezultă că acesta este o mulțime invariantă. Un alt exemplu de mulțime invariantă este ciclul limită. Un *ciclu limită* al unui sistem dinamic continuu este o orbită periodică închisă și izolată în mulțimea orbitelor.

Fie $B \subset R^k$ o mulțime mărginită. Pentru următoarele definiții folosim notația $\varphi_t(B) = \bigcup_{x \in B} \varphi_t(x)$.

Definiția 3.18.

Mulțimea $\omega(x_0) = \{x \in R^k \mid \exists t_n \in R, t_n \rightarrow \infty, \varphi_{t_n}(x_0) \rightarrow x\}$ se numește mulțimea ω -**limită** a lui x_0 .

Mulțimea $\omega(B) = \{x \in R^k \mid \exists t_n \in R, t_n \rightarrow \infty, \exists y \in B, \varphi_{t_n}(y) \rightarrow x\}$ se numește mulțimea ω -**limită** a lui B .

Mulțimea $\alpha(x_0) = \{x \in R^k \mid \exists t_n \in R, t_n \rightarrow -\infty, \varphi_{t_n}(x_0) \rightarrow x\}$ se numește mulțimea α -**limită** a lui x_0 .

Mulțimea

$\alpha(B) = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \mid \exists t_n \in \mathbb{R}, t_n \rightarrow -\infty, \exists y \in B, \varphi_{t_n}(y) \rightarrow x \right\}$ se numește mulțimea α -limită a lui B .

Teorema 3.12. Fie $B \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime mărginită. Atunci $\omega(B)$ este închisă iar dacă $\bigcup_{t \geq 0} \varphi_t(B)$ este mărginită atunci $\omega(B)$ este invariantă.

Definiția 3.19. Un ciclu limită al lui (11.1) este o orbită închisă γ astfel încât $\gamma \subset \omega(x)$ sau $\gamma \subset \alpha(x)$ pentru orice $x \notin \gamma$.

3.4.2. Mulțimi atractive, atractori, bazine de atracție

Definiția 3.20. O mulțime închisă și invariantă $A \subset \mathbb{R}^k$ se numește mulțime **atractivă** dacă există o vecinătate U a lui A astfel încât $\varphi_t(U) \subset U$ și $\bigcap_{t > 0} \varphi_t(U) = A$.

Definiția 3.21. O mulțime compactă și pozitiv invariantă $B \subset \mathbb{R}^k$ se numește mulțime **absorbantă** dacă există o submulțime mărginită U a lui \mathbb{R}^k cu proprietatea $U \supset B$ și există $t_U > 0$ astfel încât $\varphi_t(U) \subset B, \forall t > t_U$.

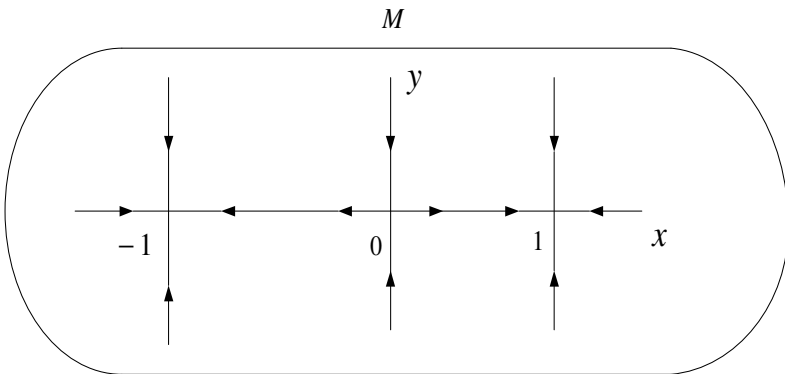
Definiția 3.22. Bazinul de atracție al unei mulțimi atractive $A \subset \mathbb{R}^k$ este dat de $\bigcup_{t \leq 0} \varphi_t(U)$ unde U este orice mulțime deschisă care satisface condițiile din definiția 4.

Exemplu

Fie sistemul,

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$$

care are un punct șa $(0,0)$ și două noduri $(\pm 1,0)$. Axa y este varietatea stabilă pentru $(0,0)$. Alegem o regiune din $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ sub formă de elipsă pe care o denumim M și care conține cele trei puncte fixe. Intervalul $[-1,1] = \bigcap_{t>0} \varphi_t(M)$ este o mulțime atractivă.



Mulțimea atractivă din exemplul precedent, intervalul $[-1,1]$, conține doi *atractori*, $(\pm 1,0)$. De aceea noțiunea de mulțime atractivă nu este suficient de precisă.

Definiția 3.23. O mulțime închisă și invariantă $A \subset \mathbb{R}^k$ se numește **topologic tranzitivă** dacă pentru orice două mulțimi deschise $U, V \subset \mathbb{R}^k$ există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\varphi_t(U) \cap V \neq \emptyset$.

Definiția 3.24. Un **atractor** este o mulțime atractivă și topologic tranzitivă.

Teorema Poincaré-Bendixon ne dă o determinare completă a comportamentului asimptotic în cazul fluxurilor din plan.

Teorema 3.12. (Poincaré-Bendixon). Fie sistemul dinamic asociat lui (11.1) în cazul $k=2$. Fie $M \subset \mathbb{R}^2$ o regiune pozitiv invariantă care conține un număr finit de puncte fixe. Fie $p \in M$ și considerăm $\omega(p)$. Atunci, una dintre următoarele afirmații este adevărată,

- i. $\omega(p)$ este un punct fix;
- ii. $\omega(p)$ este o orbită închisă,
- iii. $\omega(p)$ constă dintr-un număr finit de puncte $\{p_j\}$ și orbite γ cu $\omega(\gamma) = p_i$ și $\alpha(\gamma) = p_j$.

3.5. SOLUTII PERIODICE. STABILITATEA ACESTORA

Stabilitatea orbitelor periodice va fi enunțată luând în considerație mulțimea punctelor de pe orbita periodică.

Fie sistemul dinamic continuu asociat ecuației

$$\dot{x} = f(x) \quad (13.1)$$

unde $f: R^k \rightarrow R^k$ și $f \in C^r$.

Considerăm o soluție periodică pentru (13.1), i.e. $x(t) = x(t + T_0)$, $T_0 > 1$ perioada acesteia și fie γ orbita periodică corespunzătoare din spațiul fazelor.

Definim distanța de la un punct $x \in R^k$ la γ prin

$$d(x, \gamma) = \min \{ |x - \varphi_t(x_0)|, t \geq 0 \} \quad (13.2)$$

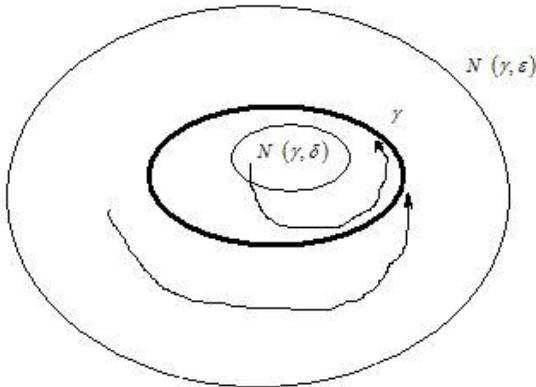
unde $x_0 \in \gamma$ este un punct oarecare, dar fixat.

O vecinătate a lui γ este

$$N(\gamma, \varepsilon) = \{ x \in R^k, d(x, \gamma) < \varepsilon \} \quad (13.3)$$

Definiția 3.25. Orbita periodică γ este **stabilă** dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât dacă $x \in N(\gamma, \delta)$ atunci $\varphi_t(x) \in N$ pentru orice $t \geq 0$. Dacă în plus $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_t(x), \gamma) = 0$ atunci γ este **asimptotic stabilă**. Dacă orbita γ nu este stabilă atunci ea este **instabilă**.

În consecință, orbita periodică, privită ca mulțime de puncte, poate atrage punctele învecinate. Mai precis, traiectoriile prin aceste puncte se apropie de orbita periodică.



Există o strânsă legătură între proprietățile dinamice ale curentului φ_t în apropierea curbei γ și cele ale unei aplicații Poincaré asociate curbei δ . Acest aspect este foarte important în cazul studiului stabilității orbitei γ .

3.5.1. Definirea unei aplicații Poincaré

Fie $\Sigma \subset R^k$ o secțiune transversală la γ în punctul $x_0 \in \gamma$. Fie $U \subset R^k$ o vecinătate a lui x_0 .

Dacă T_0 este perioada lui γ atunci când t crește valoarea lui trece de T_0 , iar curba soluție $\varphi_t(x_0)$ întâlnește pe Σ în x_0 . Dacă un punct $x \in \Sigma$ este suficient de aproape de x_0 atunci există un timp, pe care îl notăm

$\sigma(x)$, aproape de valoarea de T_0 astfel încât $\varphi_{\sigma(x)}(x)$ întâlnește Σ .

Definim aplicația $\sigma: U \rightarrow R$ astfel încât:

$$\sigma(x_0) = T_0$$

$$\varphi_{\sigma(x)}(x) \in \Sigma$$

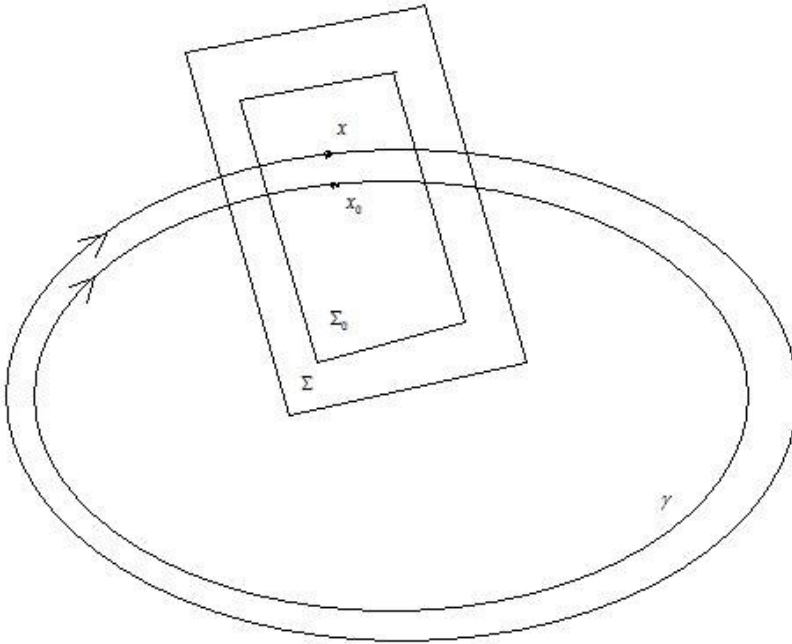
$$\varphi_t(x) \notin \Sigma \quad \text{pentru} \quad 0 < t < \sigma(x)$$

Altfel spus, pentru un punct $x \in U \cap \Sigma$ $\sigma(x)$ este momentul de timp când traiectoria prin x întâlnește prima oară pe Σ . Notăm $\Sigma_0 = U \cap \Sigma$.

Asociem orbitei γ aplicația $P: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$,

$$P(x) = \varphi_{\sigma(x)}(x) \tag{13.4}$$

Observăm că $P(x_0) = x_0$, $P \in C^r$ și P inversabilă. Numim P , aplicația Poincaré asociată lui γ .



Aplicația P este de clasă C^r la fel ca f , inversabilă pe Σ_0 iar valorile proprii ale lui $DP(x_0)$ sunt independente de $x_0 \in \gamma$. Valorile proprii ale lui $DP(x_0)$ se numesc *multiplicatorii orbitei periodice* γ .

Mai observăm că

$$x_{n+1} = P(x_n) \tag{13.5}$$

definește un sistem dinamic discret.

Două rezultate importante stabilesc legătura dintre proprietățile dinamice ale fluxului în apropierea lui γ și proprietățile lui P în apropierea lui x_0 .

Propoziția 3.1. Fie aplicația Poincaré (13.4) asociată orbitei periodice γ . Fie $x \in \Sigma$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{(x_0)}^n = x_0$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\varphi_t(n), \gamma) = 0$.

Teorema 3.13. Dacă x_0 este un punct absorbant pentru P atunci γ este asimptotic stabilă.

Fie $D\varphi_t(x_0) = \left(\frac{\delta \varphi_t^i(x_0)}{\delta x_j} \right) (x_0)$ unde $\varphi_t^i(x)$ este a i -a

component a lui φ_t .

Propoziția 3.2. Fie $H \subset R^k$ invariant în raport cu $D\varphi_{T_0}(x_0)$. Atunci $DP(x_0) = D\varphi_{T_0}(x_0)|_H$.

În cazul sistemelor dinamice generate de sisteme neautonome de EDO periodice,

$$\dot{x} = f(x) \tag{13.6}$$

unde $f: R^k \rightarrow R^k$ și $f \in C^r$, $f(x+T) = f(x)$, aplicația Poincaré P asociată pune în evidență existența orbitelor periodice (atractorilor periodici).

Teorema 3.14.

(i) Dacă P are un punct fix atunci (13.6) are o orbită periodică cu perioada T ;

- (ii) Dacă P are un punct periodic de ordin q atunci (13.6) are o soluție periodic de perioadă qT ;
- (iii) Dacă P păstrează orientarea și dacă există o curbă închisă invariata de P atunci există un tor invariant pentru (13.6);
- (iv) Dacă nici unul dintre multiplicatorii lui P nu are modulul egal cu 1 atunci P are același comportament topologic ca DP .

Exemplu de sistem dinamic care are un ciclu limită (orbită periodică)

Fie ecuația

$$\varepsilon \ddot{x} + \frac{\dot{x}^3}{3} - \dot{x} + ax = 0 \quad (13.7)$$

căreia îi asociem un sistem autonom de EDO

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{\varepsilon} \left(y - \frac{y^3}{3} - ax \right) \end{cases} \quad (13.8)$$

Considerăm cazul $\varepsilon > 0$, $a > 0$ și arătăm că sistemul dinamic asociat lui (13.8) are un ciclu limită unic atractiv.

Subliniem câteva proprietăți ale orbitelor pozitive ale lui (13.8).

Fie $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(y) = y - \frac{y^3}{3}$.

În spațiul fazelor lui (13.8) punem în evidență următoarele curbe:

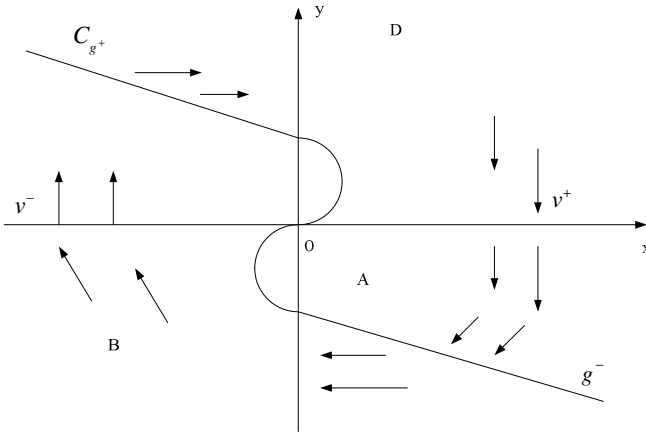
$$v^+ = \left\{ (x, y) \mid x > 0, y = 0 \right\}$$

$$g^+ = \{(x, y) \mid a \cdot x = h(y), y < 0\}$$

$$v^- = \{(x, y) \mid x < 0, y = 0\}$$

$$g^- = \{(x, y) \mid a \cdot x = h(y), y > 0\}$$

care delimitează regiunile A , B , C și D .



Observație

Orice orbită pozitivă a sistemului (13.8), cu excepția celei prin $(0, 0)$ (care este punctul de echilibru), are sensul acelor de ceasornic și intersectează curbele v^+ , g^- , v^- , g^+ în această ordine trecând prin regiunile A , B , C , D .

Demonstrația urmărește 8 cazuri pentru situațiile când punctul inițial al orbitei pozitive $(x_0, y_0) = (x(0), y(0))$ este situat după cum urmează

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) \in v^+, & & (x_0, y_0) \in A, & & (x_0, y_0) \in g^-, \\ (x_0, y_0) \in B & & & & \end{aligned}$$

$$(x_0, y_0) \in v^-, \quad (x_0, y_0) \in C, \quad (x_0, y_0) \in g^+, \\ (x_0, y_0) \in D$$

De fiecare dată se arată, după caz, că traiectoria prin (x_0, y_0) intersectează una din curbele v^+ , g^- , v^- , g^+ sau intră într-una dintre regiunile A, B, C, D .

Definim o aplicație Poincaré.

Fie $z_0 = (x_0, y_0)$, $z_0 \in v^+$ și fie $\varphi_t(z_0) = (x(t), y(t))$ curba soluție corespunzătoare PVI (13.8) cu condiția inițială $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Notăm cu $t_1 = t_1(z_0)$ cel mai mic $t > 0$ astfel încât $\varphi_{t_1}(z_0) \in v^+$.

Definim aplicația $P: v^+ \rightarrow v^+$ prin

$$P(z_0) = \varphi_{t_1}(z_0) \tag{13.9}$$

În cazul nostru secțiunea este mulțimea punctelor de pe curba v^+ iar P este aplicația Poincaré.

Observație Aplicația P păstrează ordinea punctelor din mulțimea v^+ . Mai precis, pentru două puncte $p, q \in v^+$ în relația $p \leq q$ avem $P(p) \leq P(q)$.

Relația de inegalitate este astfel încât

$$p = (x_1, 0), \quad q = (x_2, 0) \quad \text{și} \quad x_1 \leq x_2$$

Propoziția 3.3.

- (i) *Un punct $x \in v^+$ este punct fix pentru P dacă și numai dacă x este situat pe un ciclu limită al lui (13.7).*
- (ii) *Aplicația P are un punct fix unic.*
- (iii) *Punctul fix al lui P este absorbant.*

Pentru (iii) se arată că $\forall z \in v^+$ șirul $P^n(z)$, $n \in N$ are ca limită punctul z_0 unde z_0 este punctul fix al lui P . Altfel spus, în cazul sistemului dinamic asociat lui (13.8), traiectoria lui $\varphi_t(z_0)$ atrage orice altă traiectorie a lui (13.8).

3.6. BIFURCATII

Considerăm sistemul dinamic asociat EDO

$$\dot{x} = f(x, \mu) = f_\mu(x) \quad (14.1)$$

unde $x \in \mathbb{R}^k$ este vector cu k stări și $\mu \in \mathbb{R}^r$ este un vector de r parametri. Funcția $f(x, \mu) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^k$ sau $f_\mu : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ este diferențiabilă în \mathbb{R}^k și indică o familie de r parametri.

Sistemul (14.1) depinde continuu de μ : plecând dintr-o stare inițială oarecare, fluxul are direcții și comportamente diferite pentru fiecare set de parametri.

Variațiile în μ determină schimbări în comportamentul sistemului dinamic. Ele pot produce pierderea stabilității sistemului iar în unele cazuri conduc spre haos.

Vom face o scurtă prezentare a teoriei bifurcațiilor în cazul codimensiunii unu, i.e. un singur parametru $\mu \in \mathbb{R}$, pentru sisteme dinamice de dimensiune unu sau doi.

Considerăm că Jacobianul

$$f_x \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = D_x f(x, \mu)$$

este nesingular.

Fie $(x, \mu) = (x_0, \mu_0)$ un punct fix pentru (14.1), i.e. $f(x_0, \mu_0) = 0$.

Două probleme se pun :

1. Punctul fix este stabil sau instabil?

2. Cum este afectată stabilitatea sau instabilitatea de variația parametrului μ ?

Pentru a răspunde la prima întrebare trebuie să analizăm sistemul liniarizat după punctual fix (x_0, μ_0) , i.e.

$$\dot{z} = D_x f(x_0, \mu_0) z, \quad z \in \mathbb{R}^k \quad (14.2)$$

Dacă punctul fix este hiperbolic ($D_x f(x_0, \mu_0)$ nu are valori propri pur imaginare) atunci stabilitatea lui (x_0, μ_0) este determinată de ecuația liniară (14.2). Acum avem posibilitatea să dăm un răspuns și la a doua întrebare.

Dacă punctul de echilibru este stabil atunci, mici variații ale lui μ nu aduc modificări ale stabilității. Mai precis, știm că $f(x_0, \mu_0) = 0$ și că $D_x f(x_0, \mu_0)$ nu au valori propri situate pe axa imaginară. Matricea $D_x f(x_0, \mu_0)$ este inversabilă. Prin teorema funcțiilor implicite, există o unică funcție C^k , $x = x(\mu)$ astfel încât

$$f(x(\mu), \mu) = 0,$$

unde $x(\mu_0) = x_0$.

Prin continuitatea valorilor propri în raport cu parametrul μ , pentru μ suficient de aproape de μ_0 , $D_x f(x(\mu), \mu)$ nu are valori propri pur imaginare.

Deci, pentru μ suficient de aproape de μ_0 , punctul fix hiperbolic persistă iar tipul său de stabilitate rămâne neschimbat.

Problemele apar când, variind pe μ , una dintre valorile propri își schimbă semnul părții reale de la pozitiv la negativ, sau invers, tăind axa imaginară la valoarea

$\mu = \mu_0$. $D_x f(x_0, \mu_0)$ va avea o rădăcină pur imaginară iar punctual fix (x_0, μ_0) devine nehiperbolic.

În acest caz, pentru μ foarte aproape de μ_0 și x aproape de x_0 , se vor petrece schimbări radicale de dinamică. Spre exemplu, punctul fix își poate schimba tipul de stabilitate, unul sau mai multe puncte fixe pot să apară sau să dispară.

3.6.1. Bifurcația șa-nod

Fie sistemul

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - x^2, x \in \mathbb{R}^1, \mu \in \mathbb{R}^1 \quad (14.3)$$

Jacobianul este o matrice 1×1 a cărei valoare proprie este $\lambda(\mu) = f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x} = -2x$. Punctele fixe ale lui (14.3) sunt date de ecuația

$$\mu - x^2 = 0, \quad (14.4)$$

care reprezintă o parabolă în planul $\mu - x$. Originea $(x, \mu) = (0, 0)$ este punct de bifurcație. Mai precis, pentru $\mu < 0$ (14.3) nu are puncte fixe deoarece egalitatea (14.4) nu are sens.

Pentru $(x, \mu) = (0, 0)$ apare un prim punct fix dat de chiar aceste valori. El este semistabil. Pentru $\mu > 0$ valoarea proprie are următoarele semne

$$\lambda(\mu) = -2x \begin{cases} < 0 & \text{pt } x > 0 \\ > 0 & \text{pt } x < 0 \\ = 0 & \text{pt } x = 0 \end{cases} .$$

Deoarece ecuația (14.4) are două rădăcini vom avea două puncte fixe a căror stabilitate este dată de $\lambda(\mu)$. Punctul fix corespunzător semnelui $x > 0$ este stabil și atractiv iar punctul fix corespunzător semnelui $x < 0$ este instabil și repulsiv.

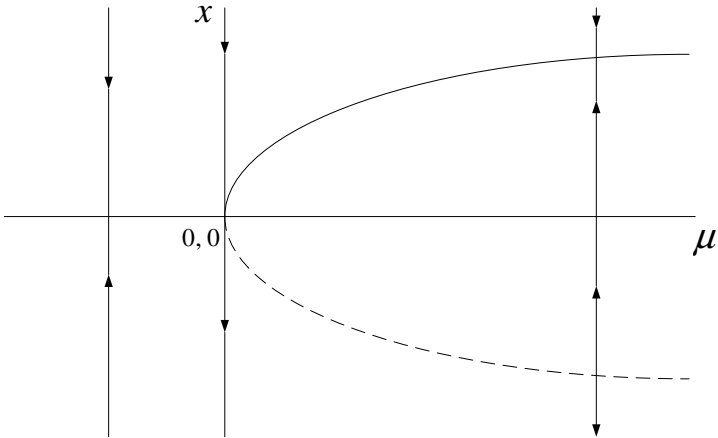


Figura de mai sus o numim "*diagramă de bifurcație*". Punctul $(x, \mu) = (0, 0)$ este un "*punct de bifurcație*" iar $\mu = 0$ este o "*valoare de bifurcație*".

Acest tip de bifurcație (în care de o parte a valorii parametrului nu avem nici un punct fix iar de cealaltă parte avem două puncte fixe) se numește "*șa-nod*".

3.6.2. Bifurcația transcritică

Fie sistemul

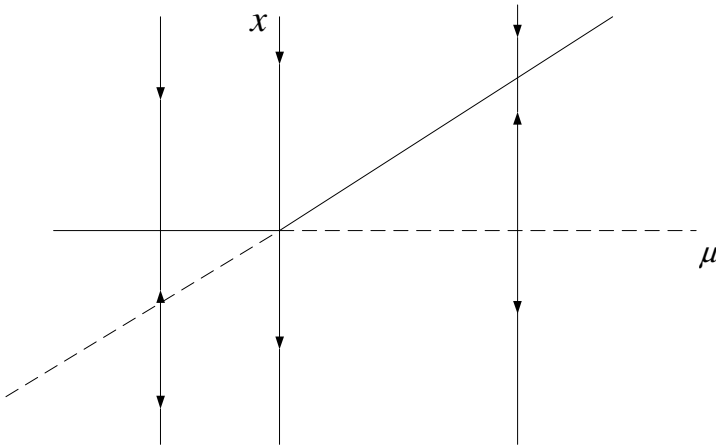
$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2, x \in \mathbb{R}^1, \mu \in \mathbb{R}^1 \quad (14.5)$$

Punctele fixe sunt date de

$$\mu x - x^2 = 0$$

sau $x = 0$ și $x = \mu$.

Conform diagramei de bifurcație



pentru $\mu < 0$ sunt două puncte fixe: $x = 0$ stabil și $x = \mu$ instabil. Pentru $(x, \mu) = (0, 0)$ aceste două puncte se unesc într-unul singur, care, din punct de vedere al stabilității, este semistabil. Pentru $\mu > 0$ avem din nou două puncte fixe $x = 0$ instabil și $x = \mu$ stabil.

Avem o schimbare a tipului de stabilitate pentru valoarea de bifurcație $\mu = 0$, iar bifurcația se numește "transcritică".

3.6.3. Bifurcația "pitchfork supercritică"

Fie sistemul

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^3, x \in \mathbb{R}^1, \mu \in \mathbb{R}^1 \quad (14.6)$$

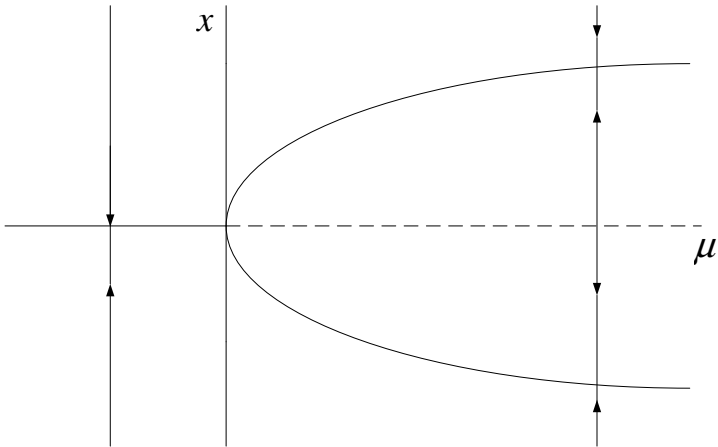
Punctele fixe sunt date de $x = 0$, $x = \pm \sqrt{\mu}$ iar stabilitatea depinde de

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu - 3x^2. \quad (14.7)$$

Pentru $\mu < 0$ avem un singur punct fix $x = 0$ care este stabil $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = \mu < 0\right)$.

Pentru $\mu > 0$ punctele fixe sunt $x = 0$ și $x = \pm \sqrt{\mu}$.

$x = 0$ este instabil deoarece $\frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) = \mu > 0$ iar celelalte două sunt stabile deoarece $\frac{\partial f}{\partial x}(\pm \sqrt{\mu}, \mu) = -2\mu < 0$.



Tipul de bifurcație se numește *“pitchfork supercritică”*. Este caracterizată de faptul că, de o parte a valorii de bifurcație avem un singur punct fix (în cazul nostru stabil) iar de cealaltă parte apar încă două și tipul de stabilitate al primului se schimbă.

3.6.4. Bifurcația *“pitchfork subcritică”*

Fie sistemul

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x + x^3, x \in \mathbb{R}^1, \mu \in \mathbb{R}^1 \quad (14.8)$$

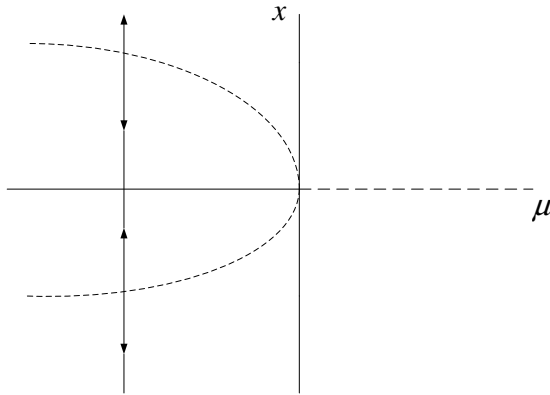
Punctele fixe sunt date de $x = 0$ și $x = \pm \sqrt{-\mu}$. Stabilitatea depinde de

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu + 3x^2.$$

Pentru $\mu < 0$ sunt trei puncte fixe, $x = 0$ și $x = \pm \sqrt{-\mu}$.

Punctul fix $x = 0$ este stabil $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) = \mu < 0 \right)$ iar $x = \pm \sqrt{-\mu}$ sunt instabile deoarece $\frac{\partial f}{\partial x}(\pm \sqrt{-\mu}, \mu) = -2\mu > 0$.

Pentru $\mu > 0$ avem un singur punct fix $x = 0$ care este instabil $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) = \mu > 0 \right)$.



Tipul acesta de bifurcație se numește "*pitchfork subcritică*". La acest tip de bifurcație, din trei puncte fixe rămâne unul singur iar tipul de stabilitate al acestuia se schimbă.

În toate cazurile prezentate avem

$$f(0,0) = 0 \quad (14.9)$$

și

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad (14.10)$$

Pentru cazul bifurcației ș-a-nod avem, în plus,

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$$

În general, un câmp de vectori unu-dimensional, depinzând de un singur parametru, i.e.

$$\dot{x} = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}^1, \mu \in \mathbb{R}^1 \quad (14.11)$$

se poate aproxima prin serii Taylor astfel:

$$f(x, \mu) = a_0\mu + a_1x^2 + a_2\mu x + a_3\mu^2 + O(3) \quad (14.12)$$

Se arată că în vecinătatea lui $(x, \mu) = (0, 0)$ câmpul (14.12) este calitativ același cu

$$\dot{x} = \mu \pm x^2 \quad (14.13)$$

Deci (14.13) poate fi văzut ca formă normală pentru bifurcația șa-nod.

Pentru cazul bifurcației transcritice sunt adevărate (14.9) și (14.10) și în plus avem:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$$

Se poate arăta că în vecinătatea lui $(x, \mu) = (0, 0)$ câmpul (14.12) este calitativ același cu

$$\dot{x} = \mu \mp x^2 \quad (14.14)$$

Deci (14.14) poate fi văzut ca forma normală pentru bifurcația transcritică.

Pentru cazul bifurcației "pitchfork" sunt adevărate (14.9) și (14.10) și în plus avem:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$$

Se arată că în vecinătatea lui $(x, \mu) = (0, 0)$ câmpul (14.12) este calitativ același cu

$$\dot{x} = \mu \mp x^3 \quad (14.15)$$

Deci (14.15) poate fi văzut ca formă normală pentru bifurcația "pitchfork".

În general, pentru (14.12) este adevărată următoarea teoremă.

Teorema 3.15 Fie $f(x, \mu) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o aplicație netedă și

(i) $f(0, \mu) = 0$ pentru toți μ

(ii) $f_x(0, 0) = 0$

(iii) $f_{x\mu}(0, 0) \neq 0$

atunci $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$ este un punct de bifurcație iar mulțimea de soluții ale lui $f(x, \mu)$ constă din două curbe care se intersectează.

Pentru cazul general

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad , \quad f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

avem teorema

Teorema 3.16 Pentru $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ presupunem în $(0, \mu_0)$:

(i) $f_x(x, \mu)$ are rangul $k-1$ (unde $f_x \equiv$ Jacobianul lui f);

(ii) $f(0, \mu) = 0$ pentru toți μ ;

(iii) $f_x \cdot x_1 = 0$ pentru $x_1 \neq 0$

$f_x^t \cdot y_2 = 0$ pentru $y_2 \neq 0$ (unde f_x^t este transpusa lui f_x)

$$\langle f_{\mu x} \cdot x_1, y_2 \rangle \neq 0$$

Atunci $(0, \mu_0)$ este punct de bifurcație pentru f .
Practic, mulțimea de soluții pentru $f(x, \mu)$, în apropierea originii, constă în două curbe care se intersectează în origine.

Exemplu

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\mu x(1-x^2) \end{pmatrix}$$

$$f_x \equiv D_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu + 3\mu x^2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f_x(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Evident, $f(0, \mu) = 0$.

$$f_x(0, 0, 0) x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f'_x(0, 0, 0) y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

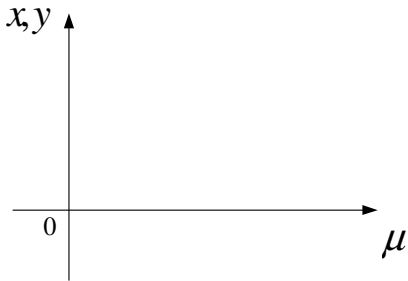
$$f_{\mu x} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{\mu x} \cdot x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

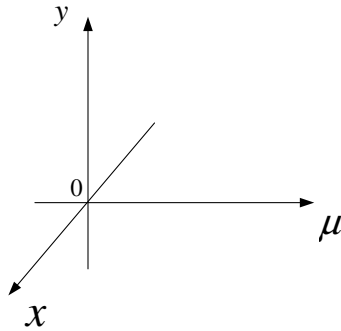
$$\langle f_{\mu x} \cdot x_1, y_2 \rangle = \langle (0, -1), (0, 1) \rangle = -1 \neq 0$$

Avem o bifurcație în $(0, \mu_0)$. Soluțiile sunt

- (i) $y = 0, x = 0$ pentru orice μ ;
- (ii) $y = 0, \mu = 0$ pentru orice x .



Cazul (i)



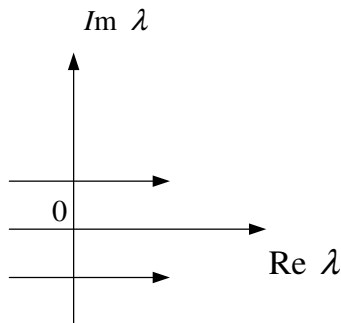
Cazul (ii)

3.6.5. Bifurcația Hopf

Fie sistemul:

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Bifurcația Hopf are loc când o pereche de valori proprii conjugate intersectează axa imaginară într-un alt punct decât originea.



Presupunem că, inițial, toate valorile proprii se află în jumătatea stângă a planului.

Când μ variază, o pereche $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm \beta(\mu)$ taie axa imaginară pentru $\mu = \mu_0$ astfel încât $\alpha(\mu_0) = 0$, $\frac{d\alpha}{d\mu}(\mu_0) \neq 0$. Atunci în μ_0 , punctul de echilibru se transformă într-un ciclu limită.

BIBLIOGRAFIE

1. M.W. Hirsh, S. Smale – Differential equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, 1974
2. J. Guckenheimer, P. Holmes – Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, 1983
3. D. K. Arrowsmith, C. M. Place – An introduction to Dynamical systems, Cambridge University Press, 1990
4. D. K. Arrowsmith, C. M. Place – Dynamical systems: differential equations, maps and chaotic behaviour, Chapman & Hall, 1992
5. V. I. Arnold – Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, 1992
6. P. Tu – Dynamical Systems, Springer, Berlin, 1994
7. R. A. Holmgren – A first course in discrete dynamical systems, Springer Berlin, 1994
8. A. Georgescu – Asymptotic treatment of differential equations, Chapman & Hall, London, 1995
9. P. Glendinning – Stability, instability and chaos, Cambridge University Press, New York, 1995
10. A. M. Stuart, A. R. Humphries – Dynamical Systems and Numerical Analysis, Cambridge University Press, 1996
11. D. W. Jordan, P. Smith – Nonlinear Ordinary Differential Equations – An Introduction to Dynamical Systems, Oxford University Press, 1999
12. S. Wiggins – Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, 2003
13. P. Băzăvan – Algoritmi Numerici in studiul Sistemelor Dinamice, Sitech, 2005